

# INTRODUCCIÓN A LA HIPOPLASTICIDAD

Hugo Alexander Rondón Quintana  
Departamento de Ingeniería Civil & Ambiental  
Universidad de Los Andes  
Bogotá D.C., Colombia - Marzo de 2006

$$\dot{\mathbf{T}} = h(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e)$$



# CONTENIDO

GENERALIDADES

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

BIBLIOGRAFÍA

# CONTENIDO

## GENERALIDADES

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

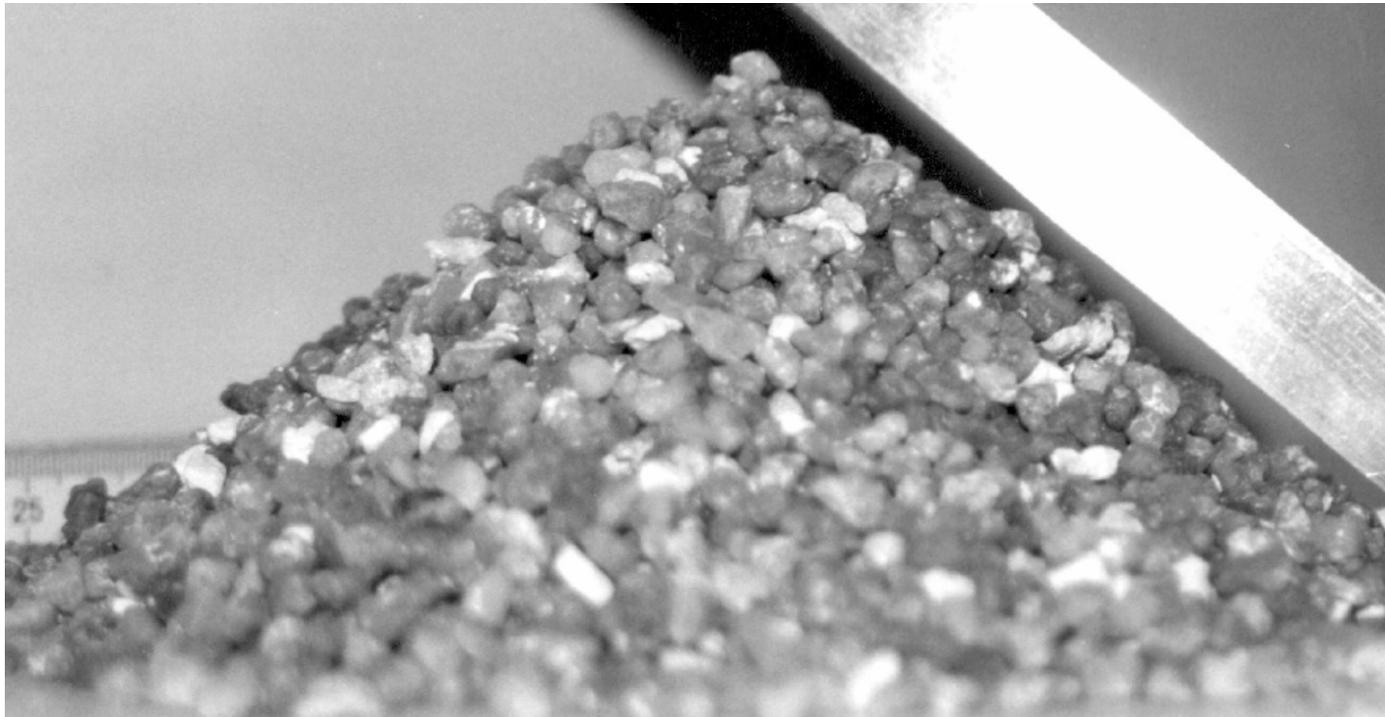
ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

BIBLIOGRAFÍA

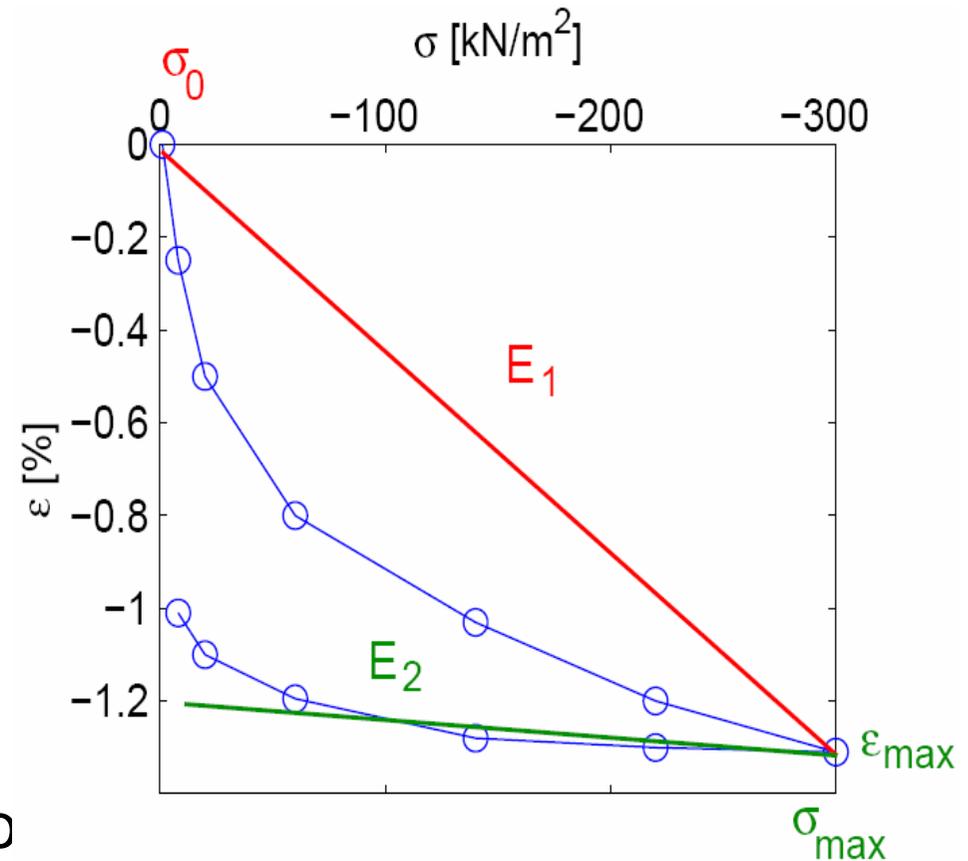
## *Introducción a la Hipoplasticidad*

- Pionero: Dr. Dimitrios Kolymbas, 1977.
- Suelos granulares (seco o saturado).



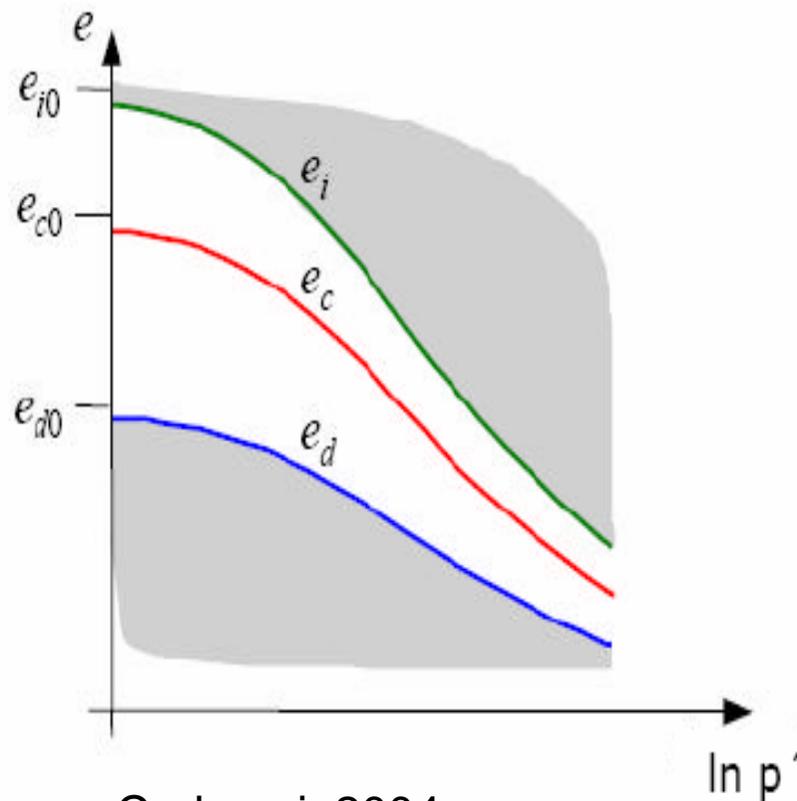
Herle, 2000.

- Deformaciones inelásticas desde el inicio de carga.
- Ecuación para carga y descarga.
- No diferencia entre deformación elástica y plástica.
- Reproduce comportamiento no lineal.



Fellin, 2002.

- Distingue tres (3) límites de  $e$ :



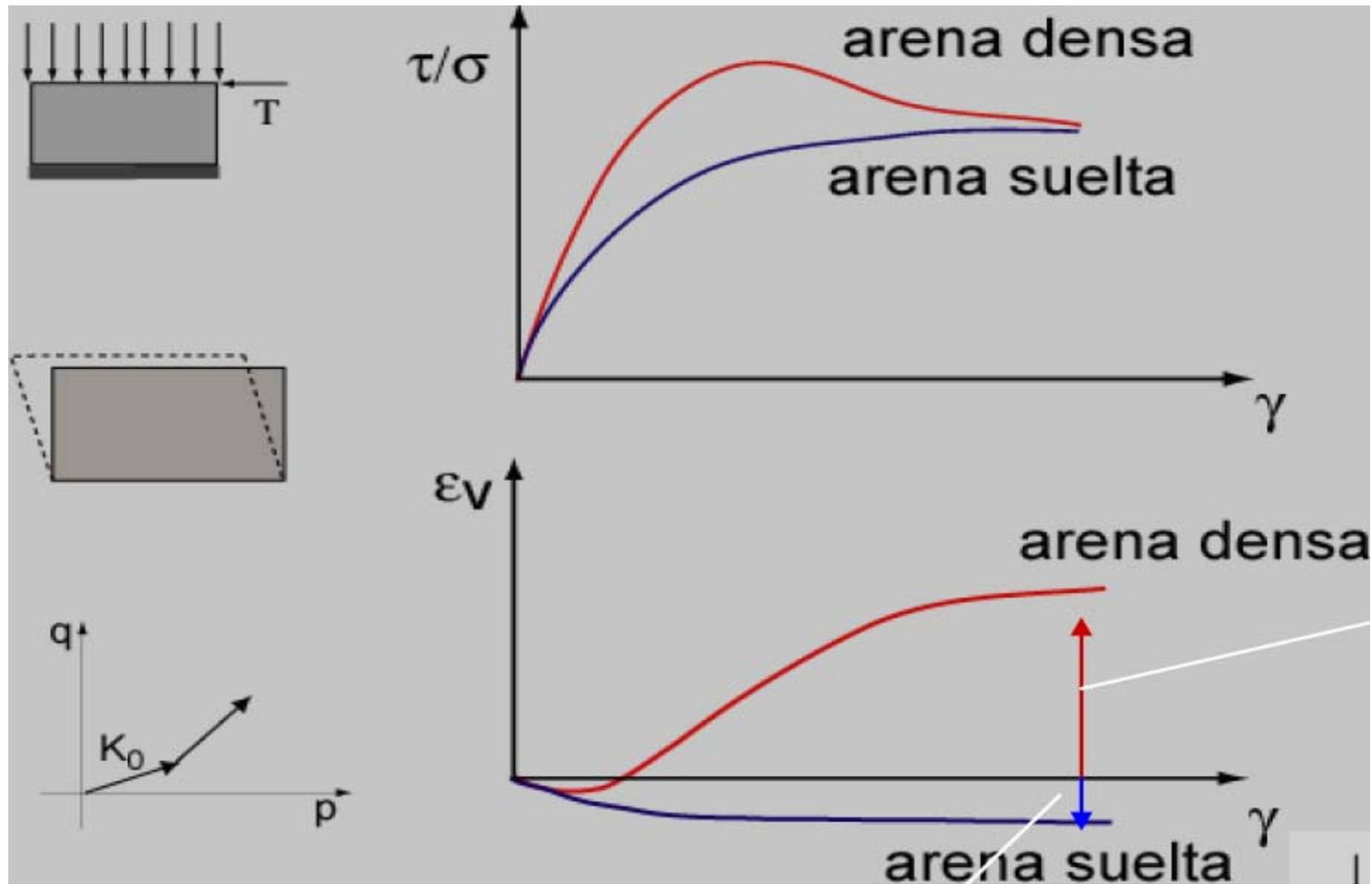
Cudmani, 2004.

$e_{i0}$ : Relación de vacíos máxima para  $p_s=0$ .

$e_{c0}$ : Relación de vacíos crítica para  $p_s=0$ .

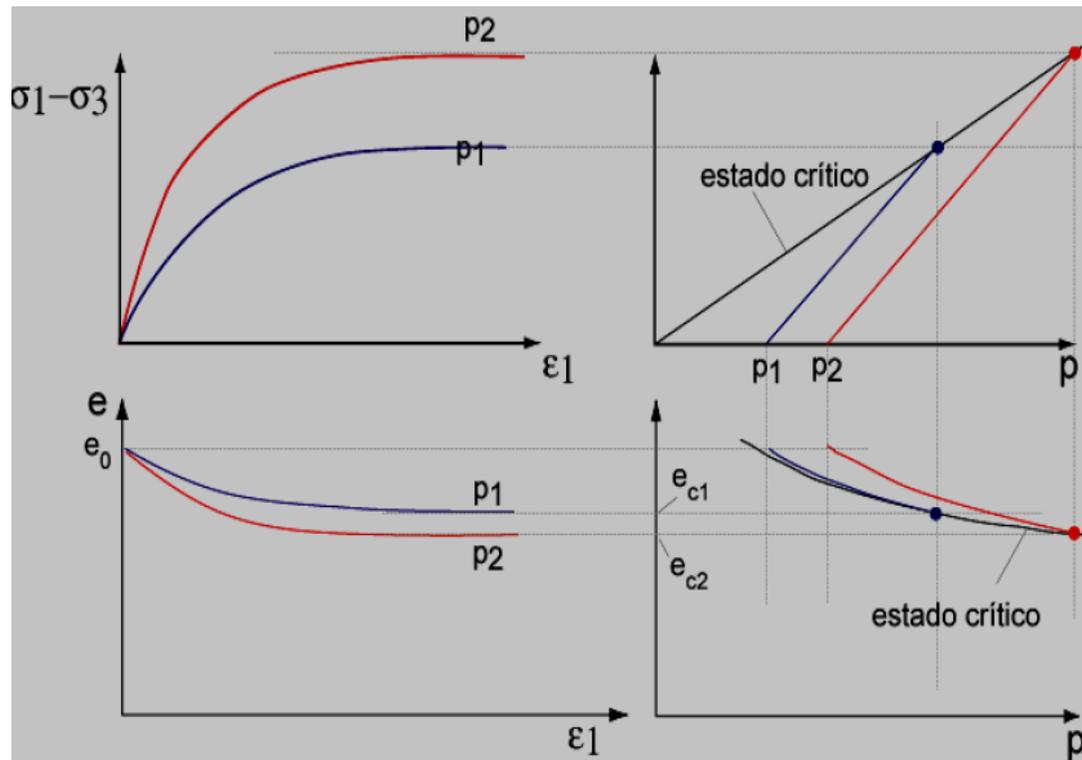
$e_{d0}$ : Relación de vacíos mínima para  $p_s=0$ .

- Predice dilatancia y contractancia.

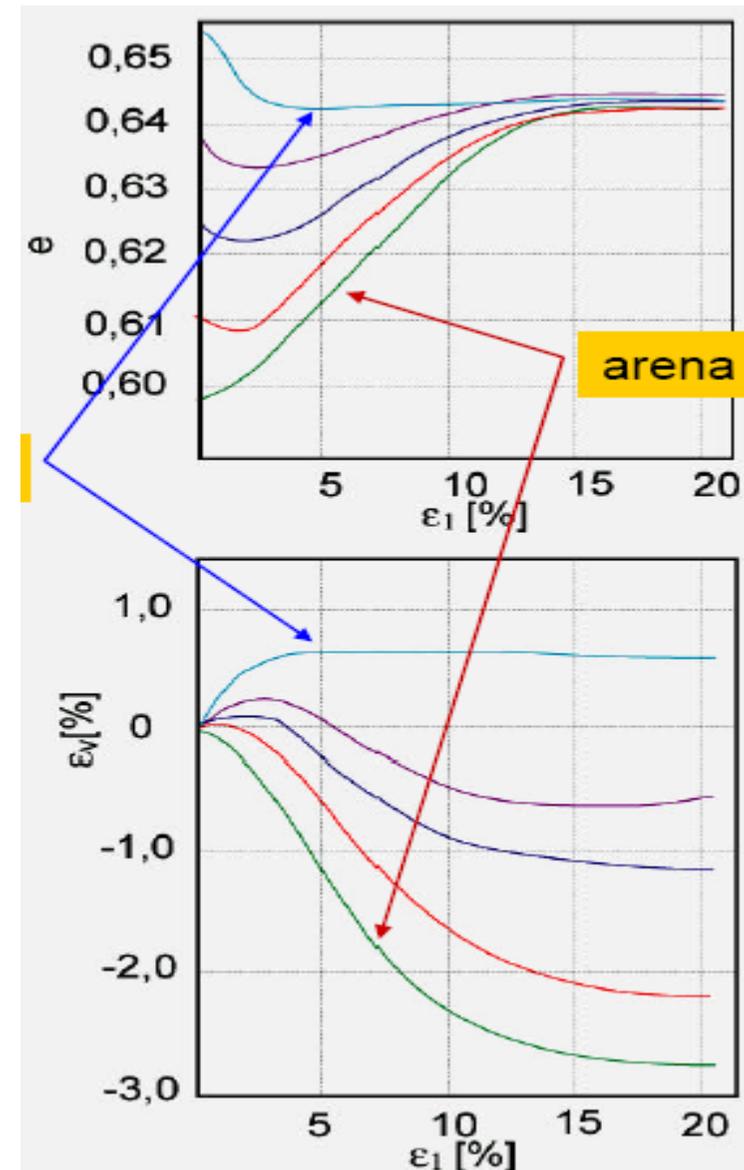


Cudmani, 2004.

- Predice estado crítico.

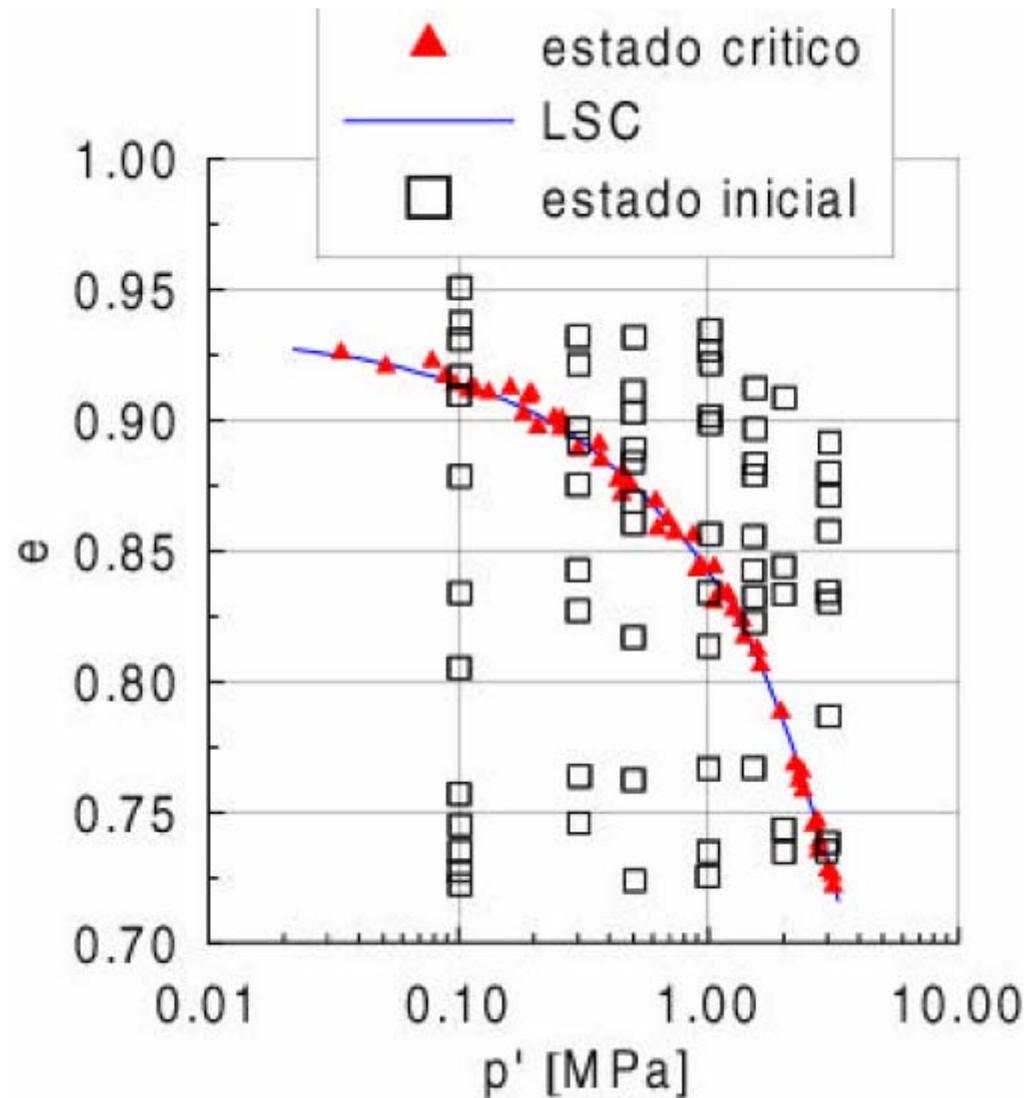


Cudmani, 2004.



- Estado crítico.

Verdugo e Ishihara,  
1990



- Los 8 parámetros hipoplásticos dependen: características granulométricas, forma, angularidad, dureza y resistencia de la partícula.
- Son de fácil determinación experimental.



Herle & Gudehus, 1999.

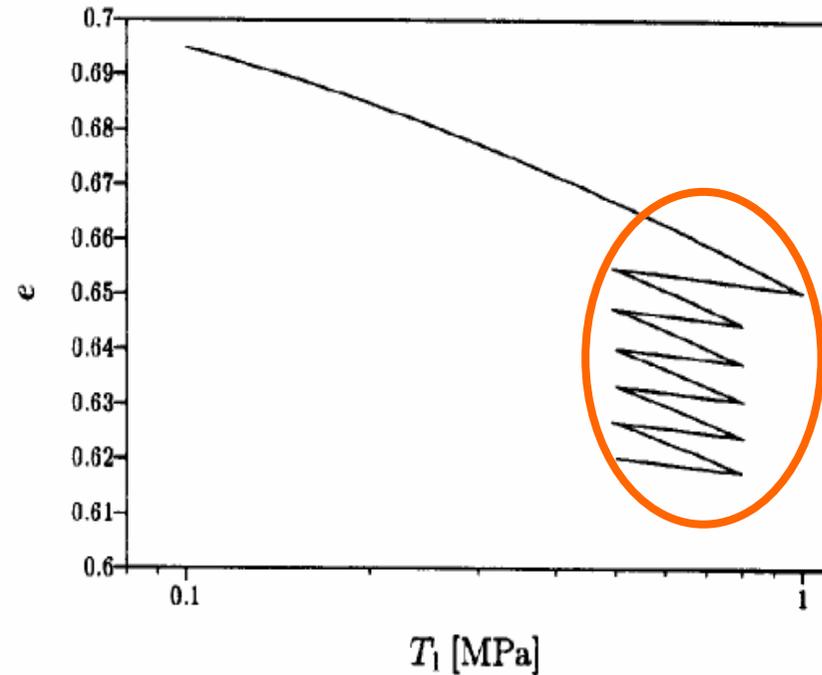
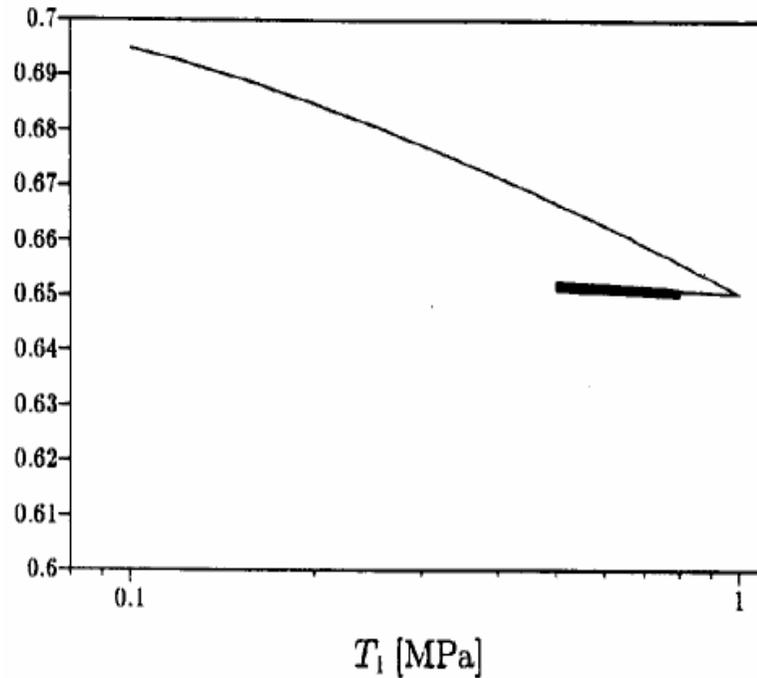
El modelo hipoplástico asume que:

- El estado del material es caracterizado por el tensor de esfuerzos efectivos ( $\mathbf{T}$ ) y por la relación de vacíos ( $e$ ).

$$\dot{\mathbf{T}} = h(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e)$$

- Comportamiento mecánico no depende de la velocidad de deformación ( $\mathbf{D}$ ).
- Granos permanentes.
- Deformación: reacomodo de los granos durante carga y descarga.
- Efectos superficiales no son tenidos en cuenta (capilaridad, cementación, etc.).

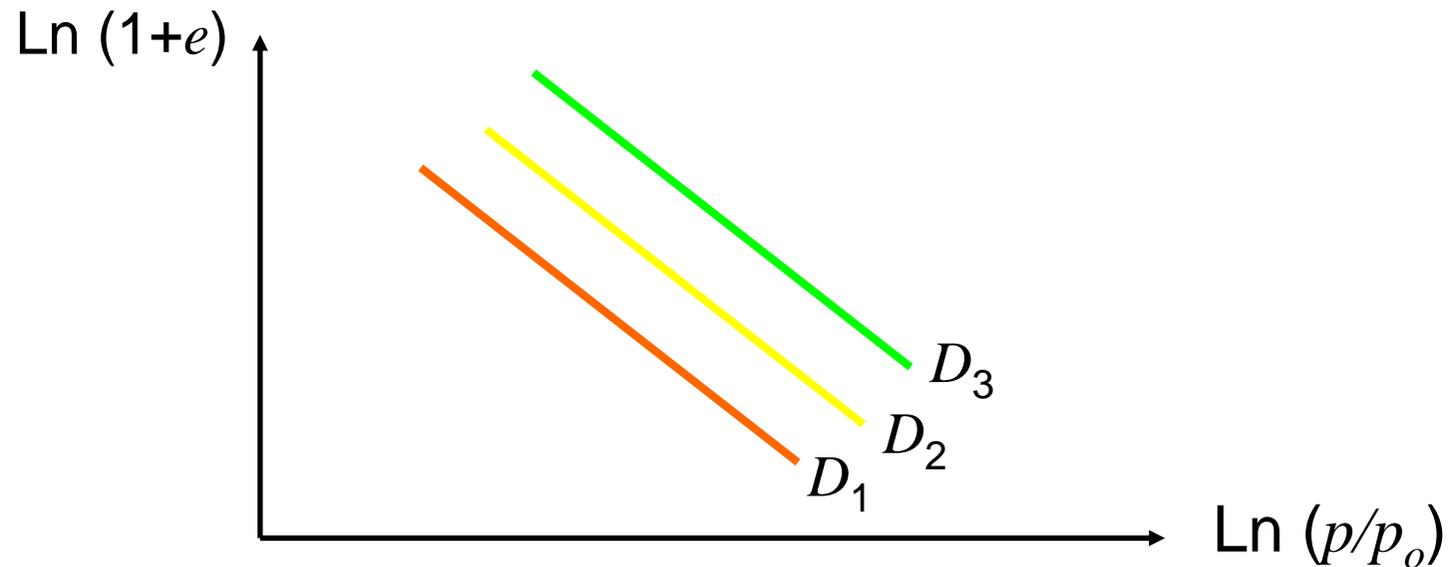
- Limitación: cargas cíclicas.



Niemunis & Herle, 1997.

**Extensión: deformación intergranular ( $\delta$ ).**

- Limitación: materiales “cohesivos” o blandos.

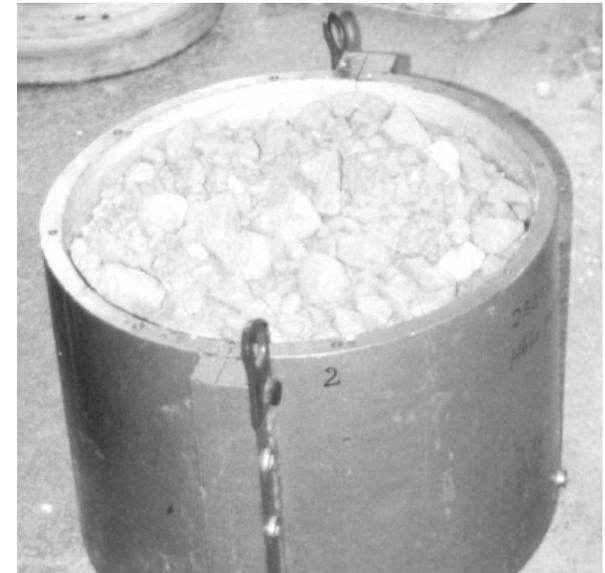
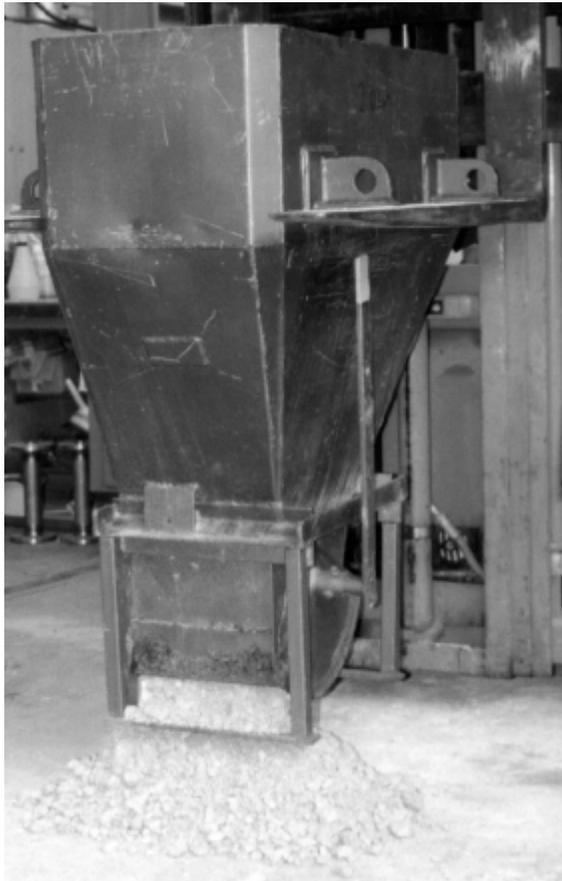


$D_1, D_2, D_3$ : Velocidades de deformación.

**Extensión: Viscohipoplasticidad.**

## *Introducción a la Hipoplasticidad*

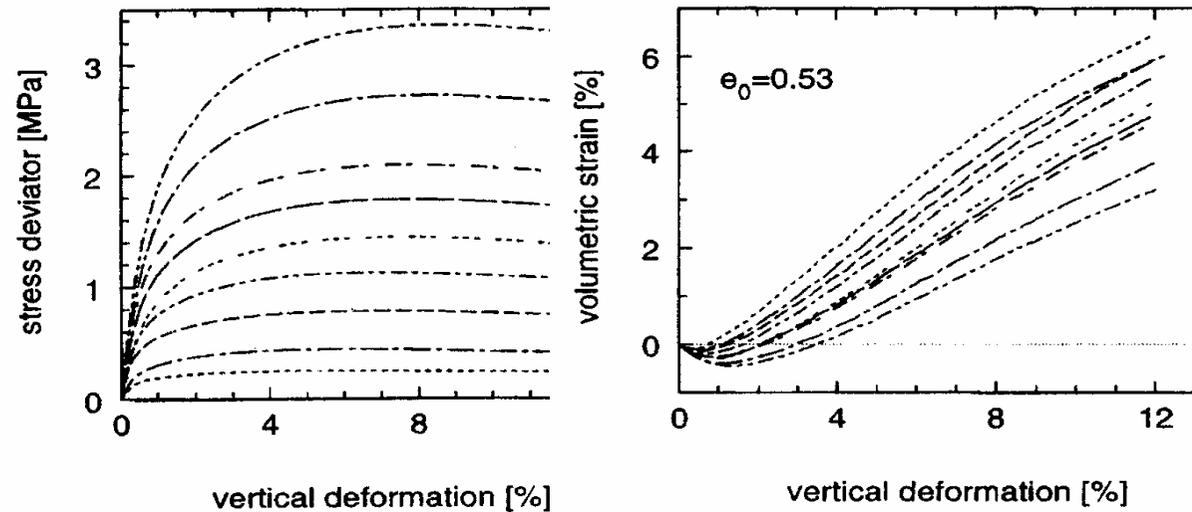
- Dificultad: determinación experimental de parámetros hipoplásticos sobre materiales como gravas.



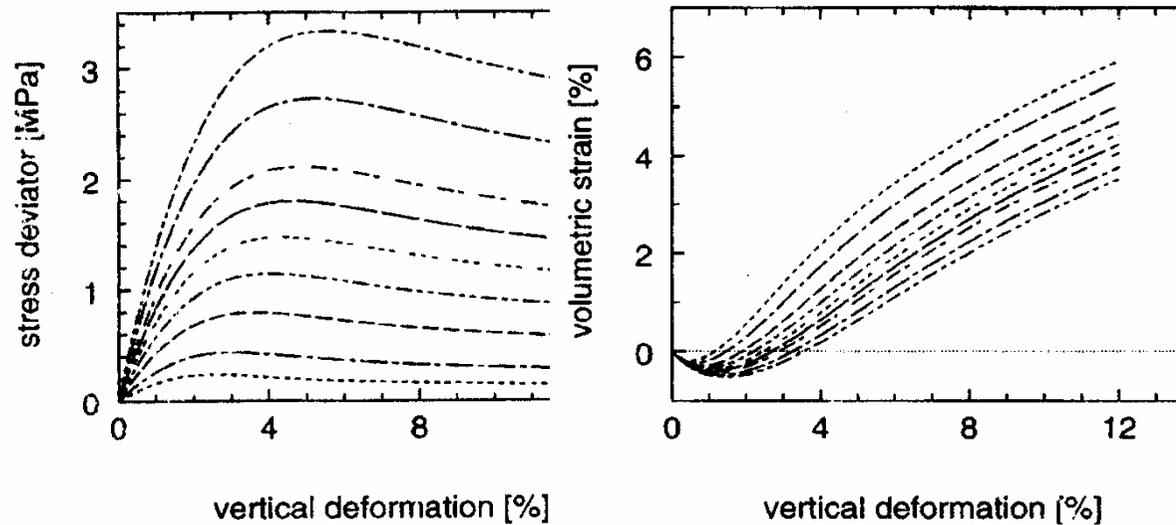
Herle, 2000.

# Triaxial drenado, arena de *Karlsruhe*. GUDEHUS, 1999.

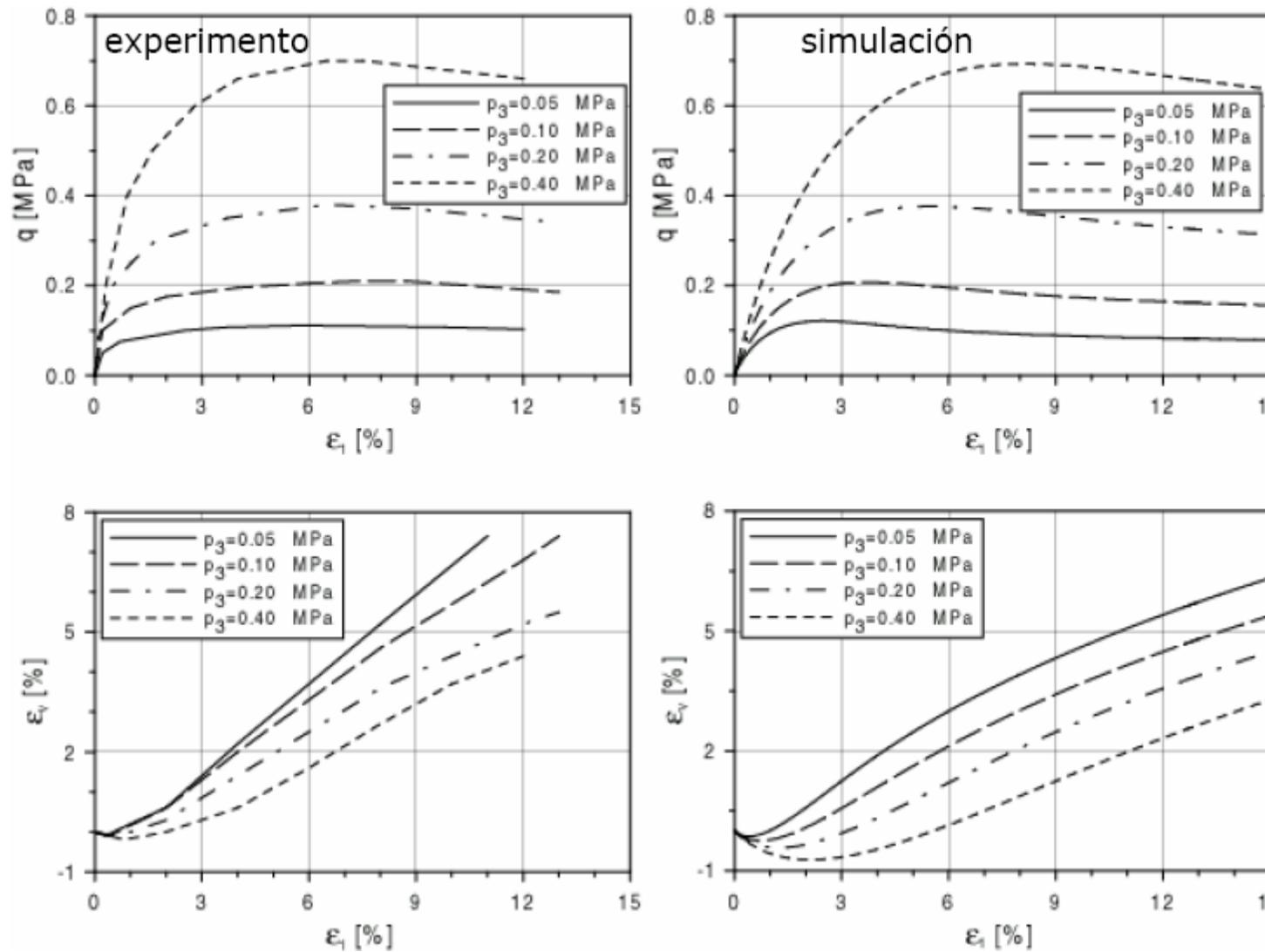
Experimental



Simulación

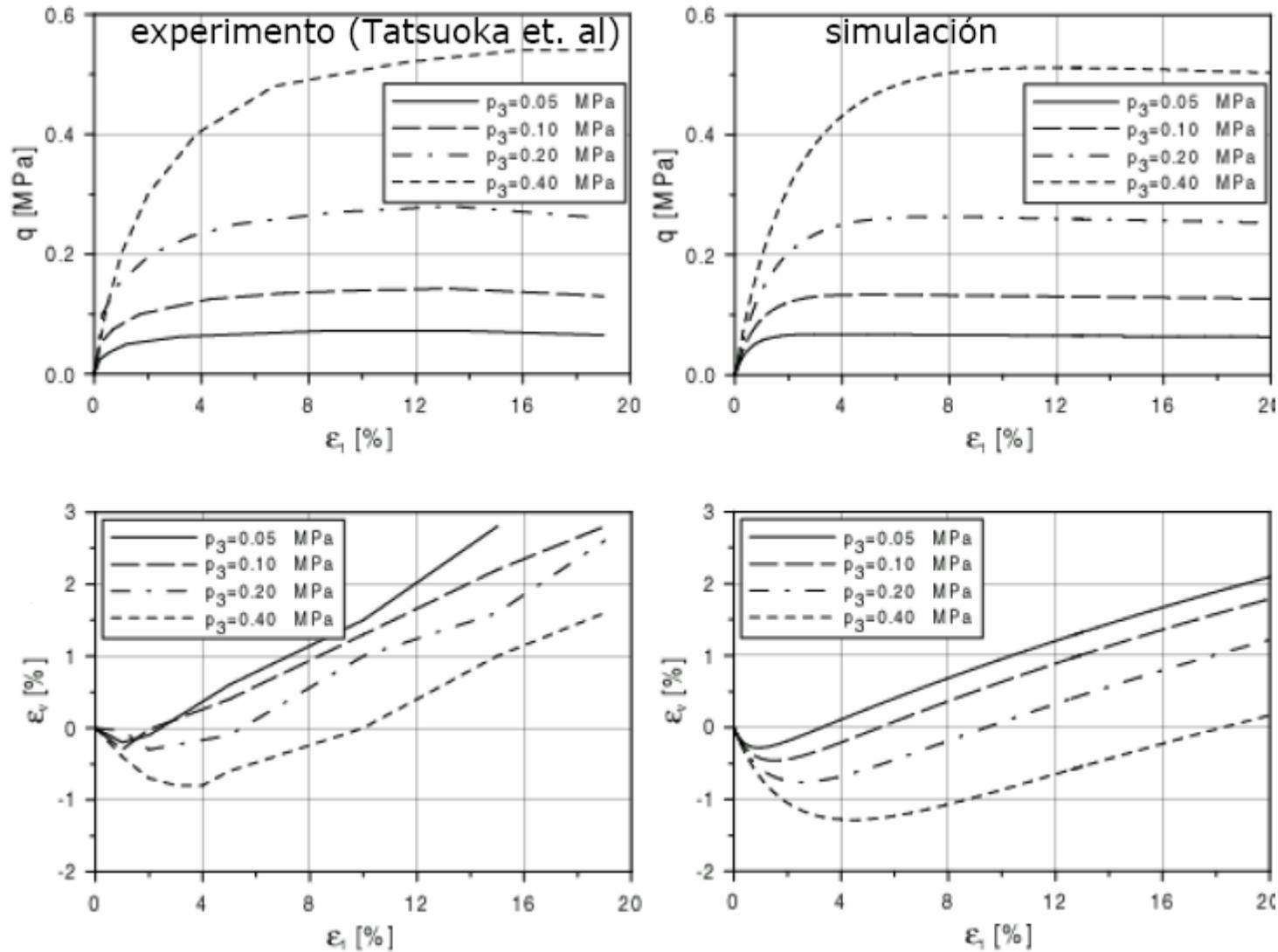


Triaxial drenado, arena *Toyoura* (denso). TATSUOKA & FUKUSHIMA, 1984.



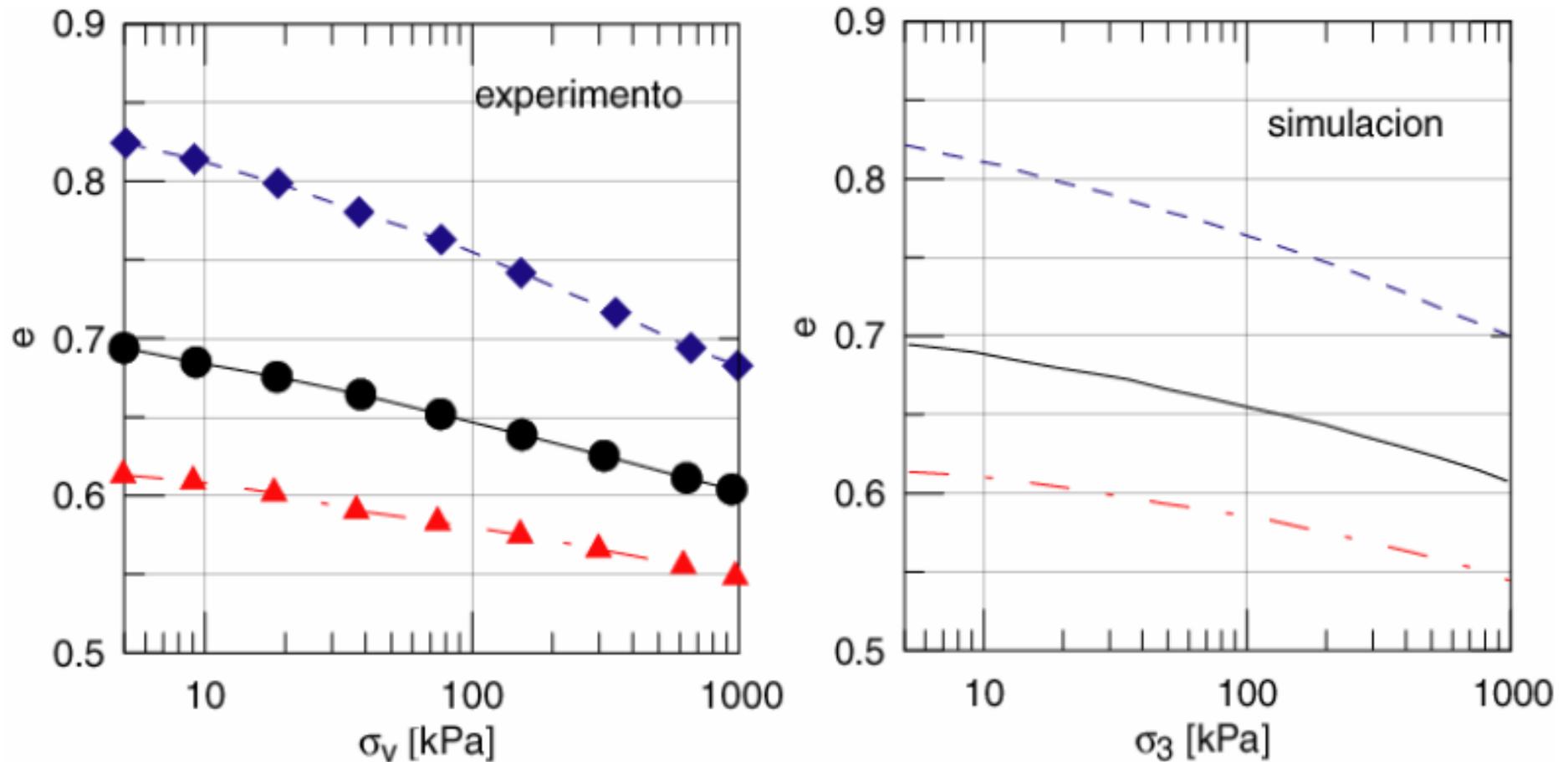
Cudmani, 2004.

Triaxial drenado, arena *Toyoura* (suelto). TATSUOKA & FUKUSHIMA, 1984.



Cudmani, 2004.

## Compresión edométrica. HERLE, 1997



Cudmani, 2004.

# CONTENIDO

GENERALIDADES

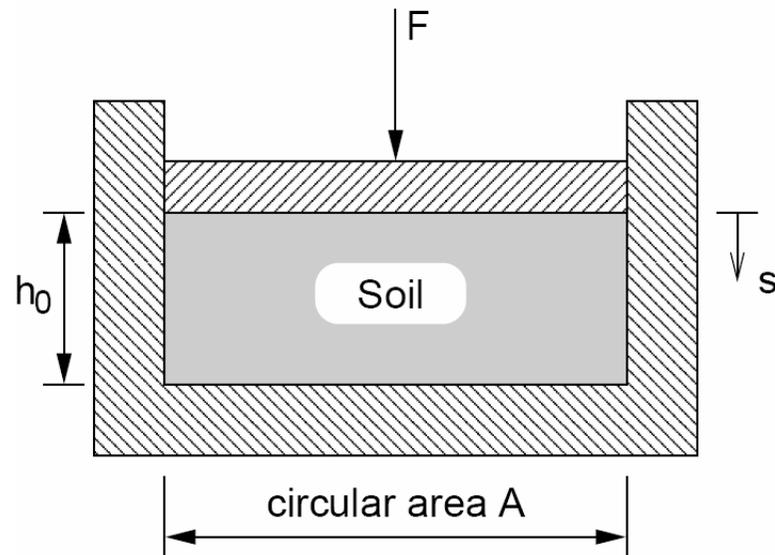
ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

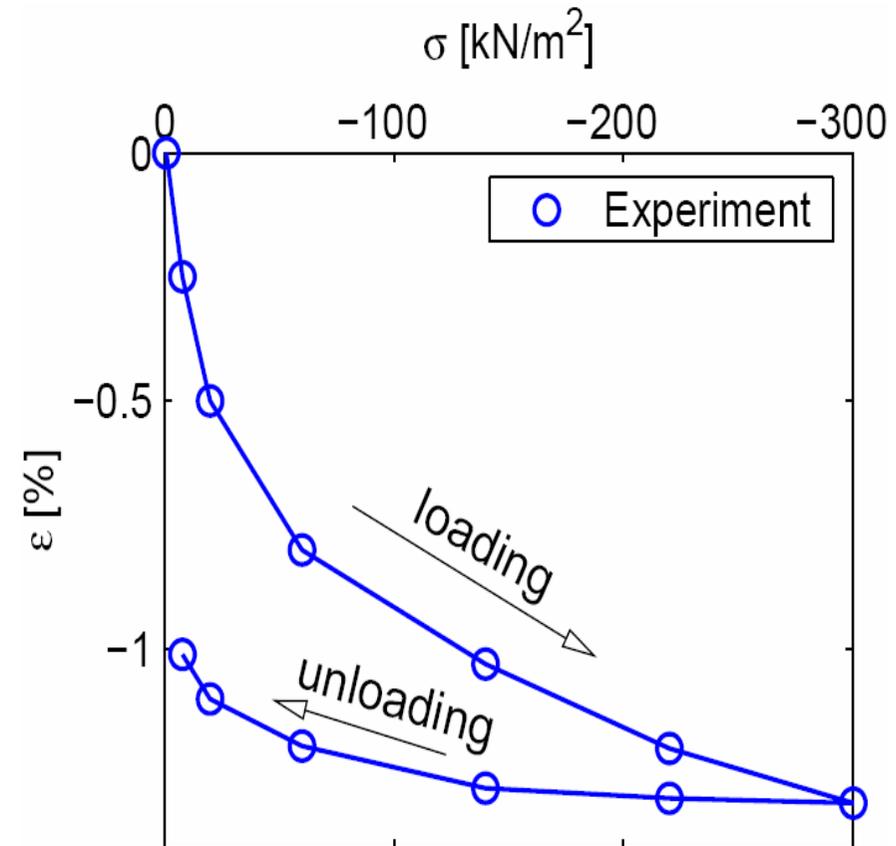
BIBLIOGRAFÍA

## CASO 1: Compresión confinada o edométrica:



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

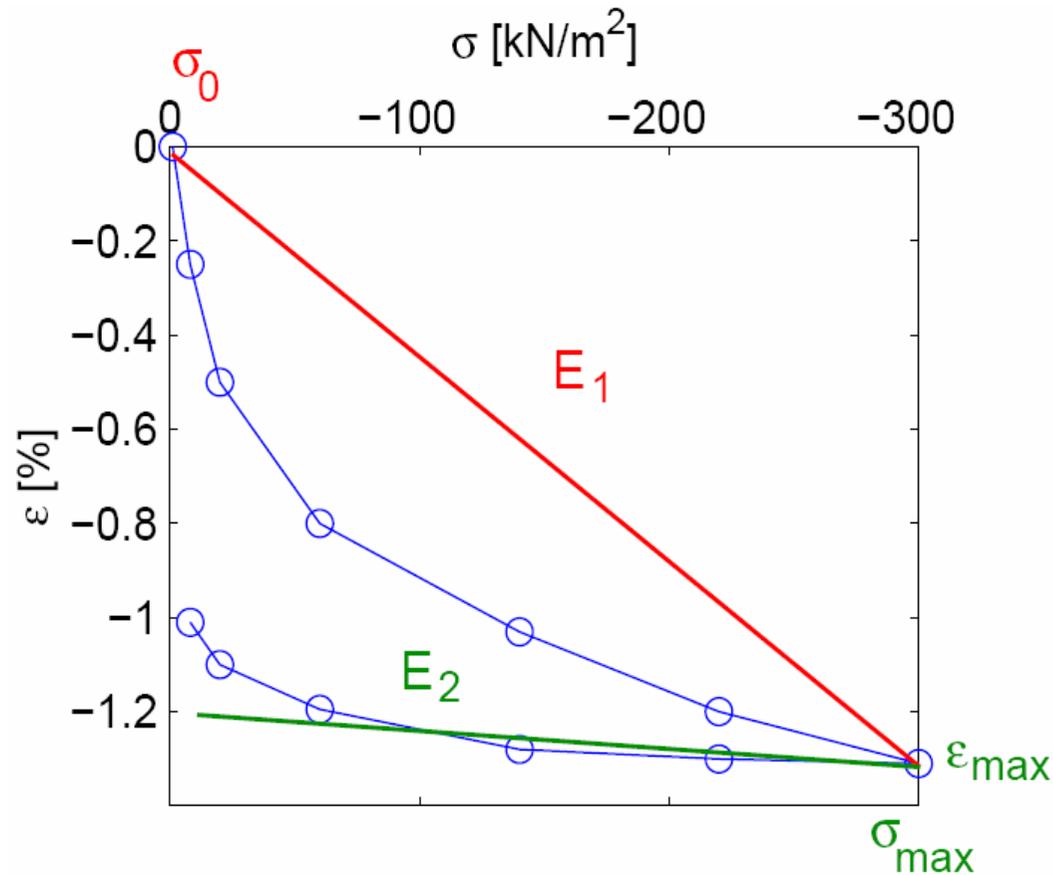
$$\varepsilon = -\frac{s}{h_0}$$



No lineal e inelástica

Fellin, 2002.

## Compresión confinada (carga y descarga):



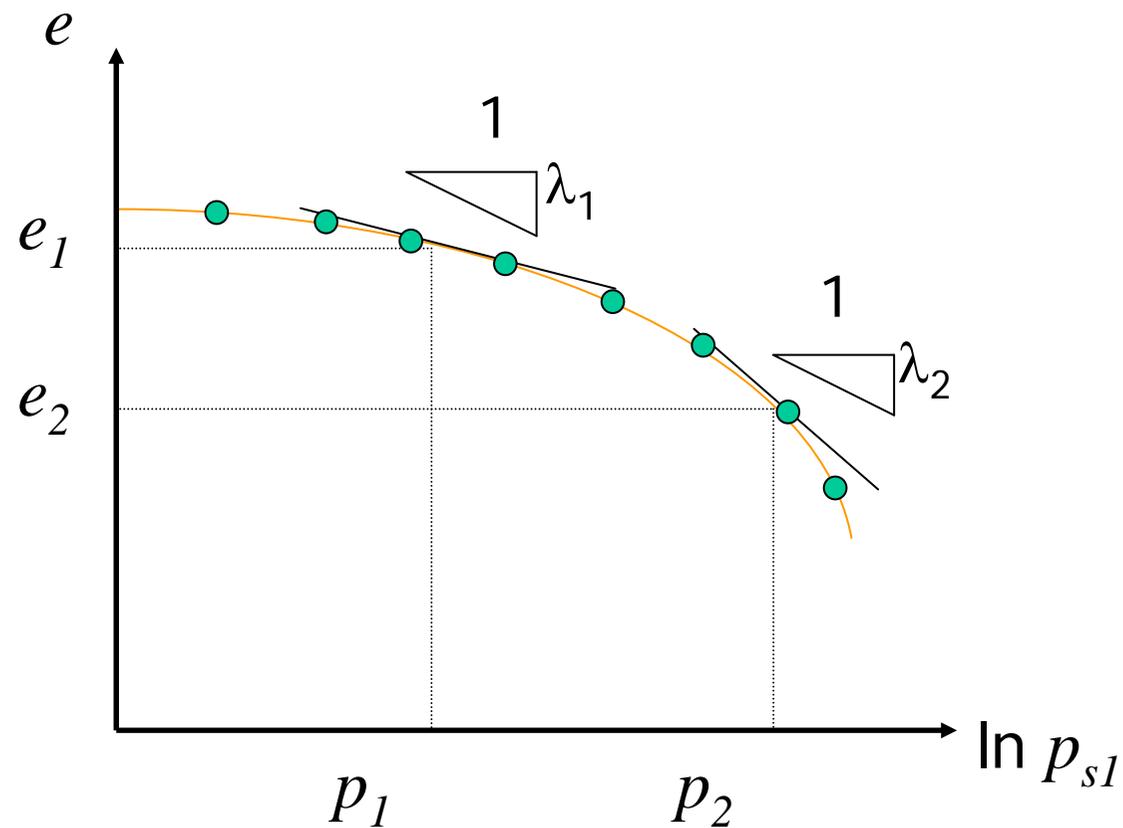
$$\sigma = \sigma_0 + E_1 \varepsilon$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_2 (\varepsilon - \varepsilon_{\max})$$

## Aproximación lineal e inelástica

Fellin, 2002.

- Mejor aproximación: incremental punto a punto e interdependencia del tiempo.



Compresión confinada o edométrica:

$$\dot{\sigma} = \frac{E_1 + E_2}{2} \dot{\epsilon} + \frac{E_2 - E_1}{2} |\dot{\epsilon}|$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

Valor absoluto: diferente rigidez, carga y descarga.

**Hasta aquí: Aproximación lineal e inelástica**

**Falta: comportamiento no lineal.**

Solución: introducir dependencia de la rigidez con el esfuerzo.

$$\dot{\sigma} = C_1 \sigma \dot{\varepsilon} + C_2 \sigma |\dot{\varepsilon}|$$

Integrando se obtiene:

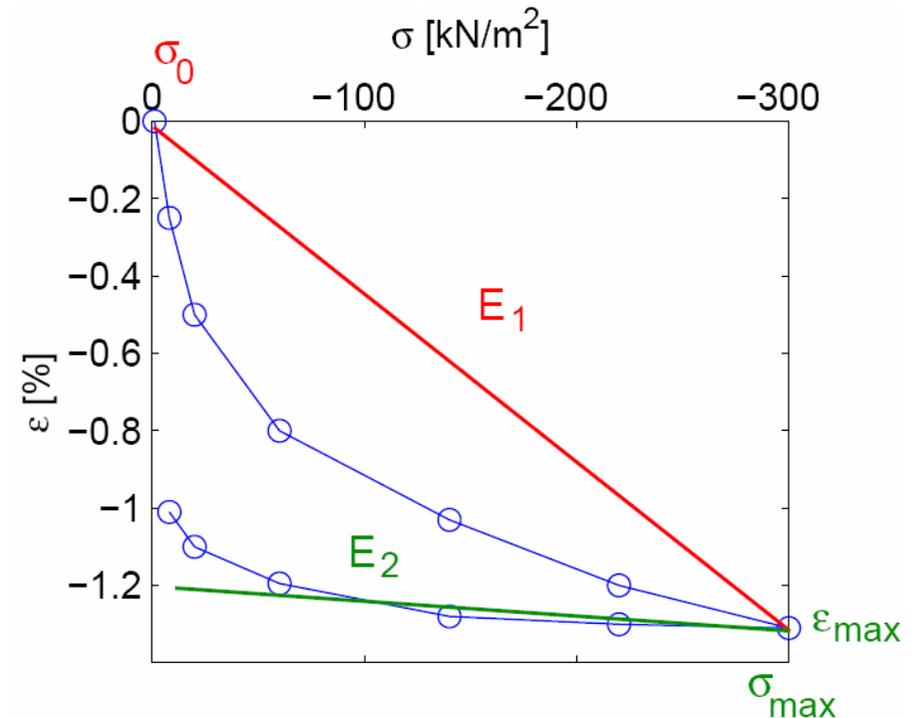
$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = (C_1 - C_2)(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

De la mecánica de suelos se conoce:

$$d\sigma = -C_c^{-1} \sigma de \quad e = e_o + (1 + e_o)\varepsilon$$

Fellin, 2002.

Donde  $C_c$  es el índice de compresibilidad y  $C_e$  es el de descarga.



Derivando  $e$  con respecto a  $\varepsilon$ , e igualando se obtiene:

$$-\frac{1 + e_0}{C_c} = C_1 - C_2 \quad \text{Carga}$$

$$-\frac{1 + e_0}{C_e} = C_1 + C_2 \quad \text{Descarga}$$

De lo anterior se obtienen los parámetros del modelo:

$$C_1 = -\frac{1 + e_0}{2} \frac{C_e + C_c}{C_e C_c}$$

$$C_2 = -\frac{1 + e_0}{2} \frac{C_c - C_e}{C_e C_c}$$

Ecuación hipoplástica unidimensional para compresión edométrica:

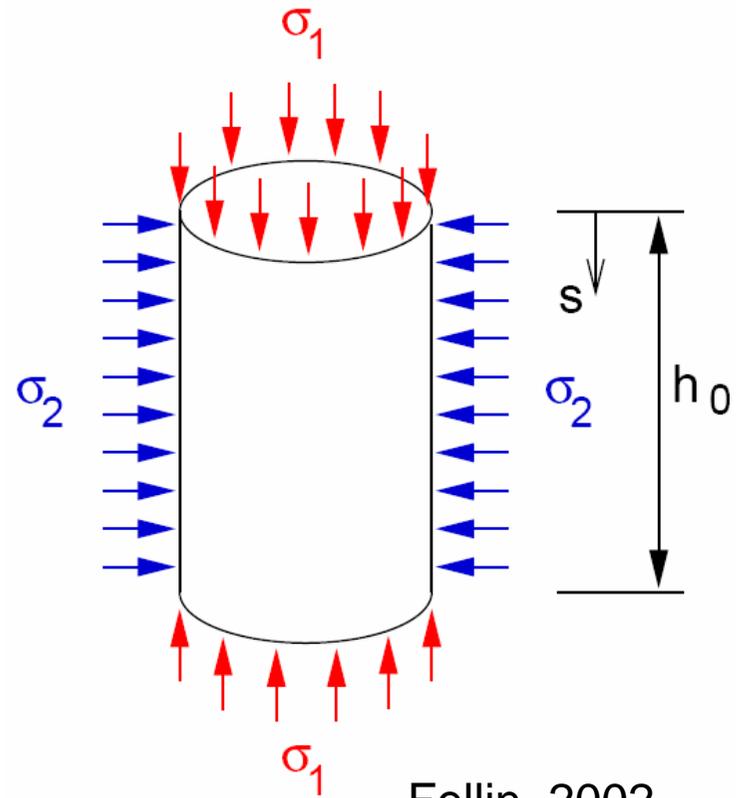
$$\dot{\sigma} = \left[ -\frac{1+e_0}{2} \frac{C_e + C_c}{C_e C_c} \right] \sigma \dot{\varepsilon} + \left[ -\frac{1+e_0}{2} \frac{C_c + C_e}{C_e C_c} \right] \sigma \left| \dot{\varepsilon} \right|$$

Comparando con el caso en 3D:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

CASO 2: Compresión triaxial:

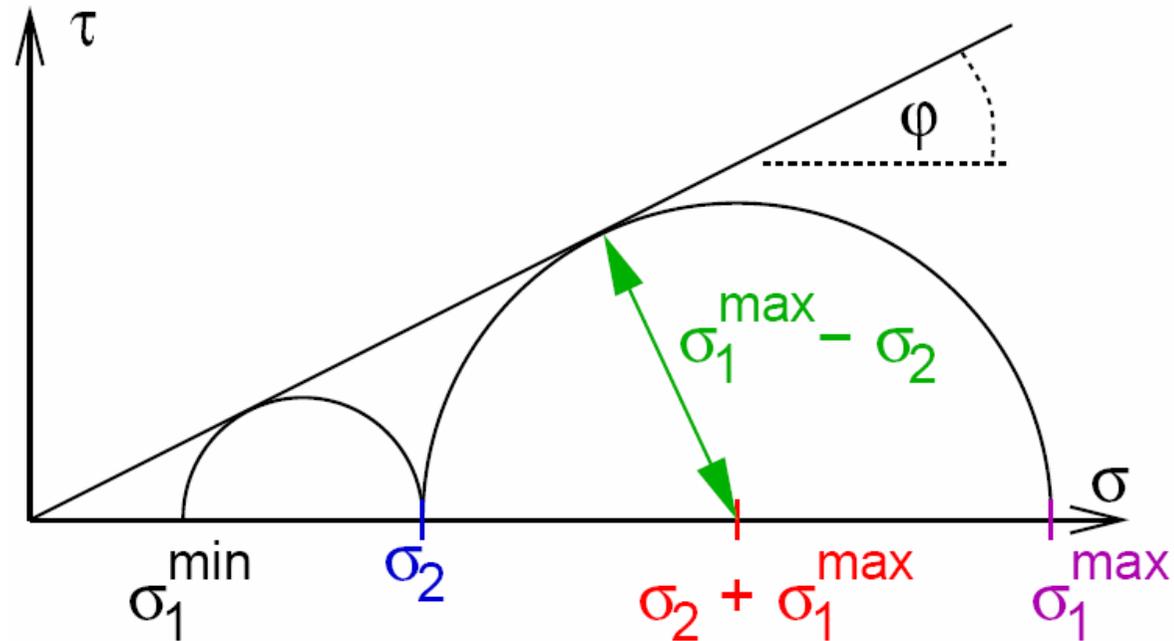
- Diferente rigidez para carga y descarga (valor absoluto de  $\varepsilon$ ).
- En la falla: rigidez del material desvanece.
- El material presenta una rigidez inicial  $E_o$ .



Fellin, 2002.

$$\varepsilon_1 = -\frac{s}{h_o}$$

## Criterio de falla de Mohr-Coulomb.



$$\sigma_1^{max} - \sigma_2 = (\sigma_1^{max} + \sigma_2) \sin \varphi$$

$$\sigma_2 - \sigma_1^{min} = (\sigma_2 + \sigma_1^{min}) \sin \varphi$$

Fellin, 2002.

Compresión triaxial:

$$\dot{\sigma}_1 = a_1(\sigma_1 + \sigma_2)\dot{\epsilon}_1 + a_2(\sigma_1 - \sigma_2)|\dot{\epsilon}_1|$$

Inicialmente  $\sigma_1 = \sigma_2$ :

$$a_1 = \frac{E_0}{2\sigma_2}$$

En la falla del material  $\sigma_1$  permanece constante:

$$a_1(\sigma_1^{max} + \sigma_2) - a_2(\sigma_1^{max} - \sigma_2) = 0$$

$$a_2 = \frac{a_1}{\sin \varphi} = \frac{E_0}{2\sigma_2 \sin \varphi}$$

Ecuación hipoplástica unidimensional para compresión triaxial:

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{E_0}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2} \dot{\epsilon}_1 + \frac{E_0}{2 \sin \varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2} |\dot{\epsilon}_1|$$

Comparando con el caso en 3D:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

# CONTENIDO

GENERALIDADES

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

BIBLIOGRAFÍA

Ecuación Hipoplástica:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = h(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e)$$

Función expansión (Wang, 1970):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}} &= \phi_0 \mathbf{1} + \phi_1 \mathbf{T} + \phi_2 \mathbf{D} + \phi_3 \mathbf{T}^2 + \phi_4 \mathbf{D}^2 + \phi_5 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) \\ &+ \phi_6 (\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^2) + \phi_7 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}) \\ &+ \phi_8 (\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}^2), \\ \phi_i &= \phi_i ( \text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3, \\ &\text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2), \text{tr}(\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{D}^2) ) \end{aligned}$$

- D. Kolymbas (1985):

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 \frac{1}{2} (\mathbf{T}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{T}) - C_2 \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) \mathbf{1} + \left[ C_3 \mathbf{T} + C_4 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} \right] \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}$$

$C_{1,2,3,4}$ : constantes.

Desventaja:  $e$  y la influencia del desviador.

- Wu Wei (1992):

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 (\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{D} + C_2 (\mathbf{T}\mathbf{D}) + \left[ C_3 \frac{\mathbf{T}\mathbf{T}}{\text{tr}\mathbf{T}} + C_4 \frac{\mathbf{T}^*\mathbf{T}^*}{\text{tr}\mathbf{T}} \right] \|\mathbf{D}\|$$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} - \left( \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{3} \right) \mathbf{1}$$

$C_{1,2,3,4}$ : constantes.

Desventaja:  $e$ .

Ecuación hipoplástica de Von Wolffersdorff (1996):

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

Tensores de rigidez

$f_d$ : Factor de picnotropía

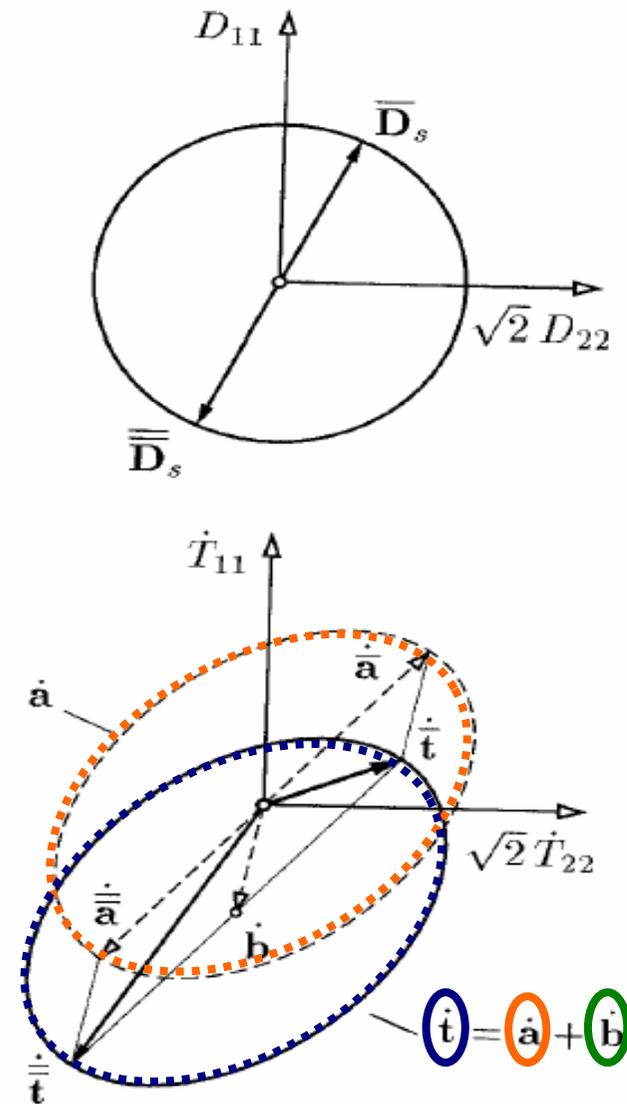
Con  $\mathbf{N}$ : comportamiento inelástico.

Sin  $\mathbf{N}$ : comportamiento hipoelástico, rigidez no lineal.

Envolvente de respuesta

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

Hipoelástico



Bauer, 1996.

Wolffersdorff (1996):  $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$

$$\mathbf{L} = f_b f_e \frac{1}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left( F^2 \mathbf{I} + a^2 \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}} \right)$$

$$\mathbf{N} = f_b f_e f_d \frac{F a}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left( \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^* \right)$$

$f_b$ : factor de barotropía;  $f_d, f_e$ : Factores de picnotropía.

$a$ : tiene en cuenta el estado crítico.

$F$ : Regla de flujo del material.

$\mathbf{I}$ : tensor unitario.

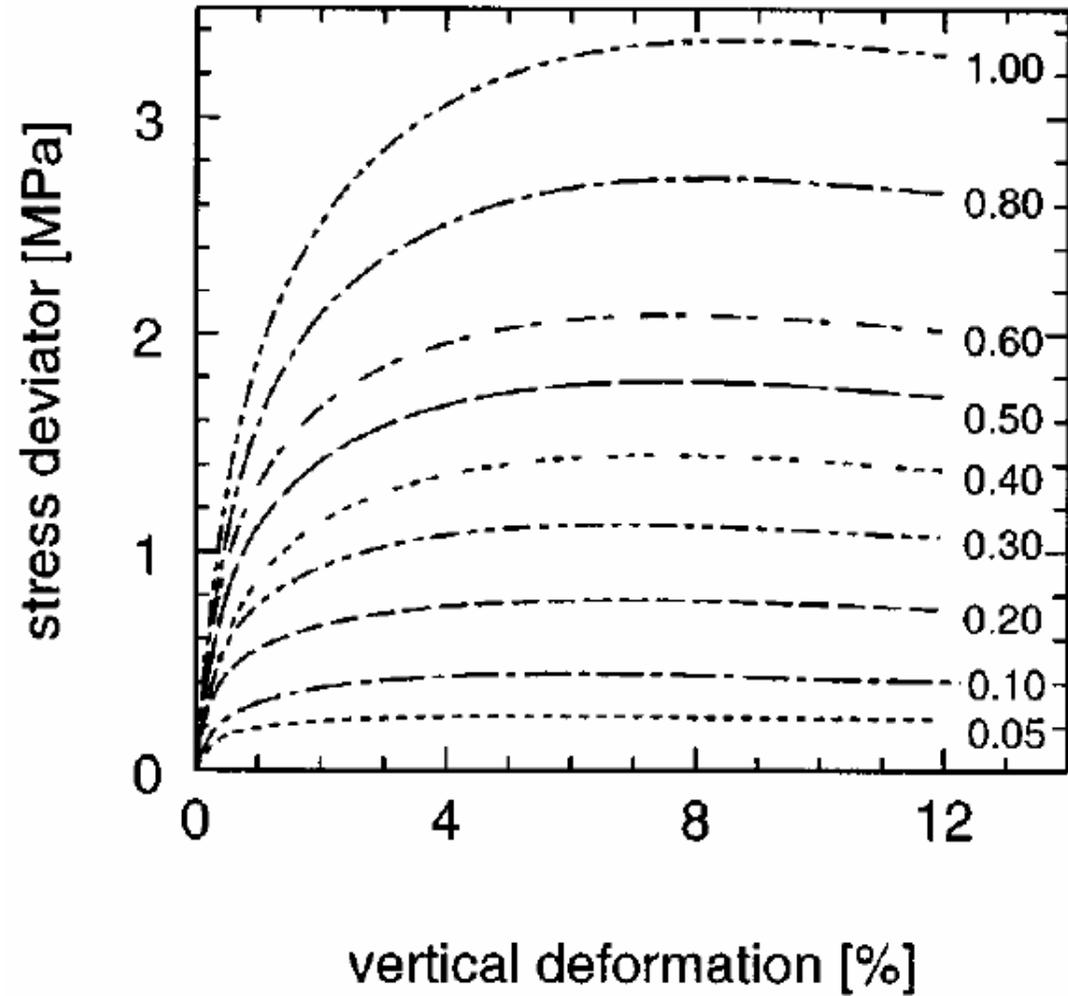
Parámetros:  $\varphi_c, e_{io}, e_{co}, e_{do}, h_s, n, \alpha, \beta$ .

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\text{tr}\mathbf{T}} \longrightarrow \text{Tensor normalizado de esfuerzos}$$

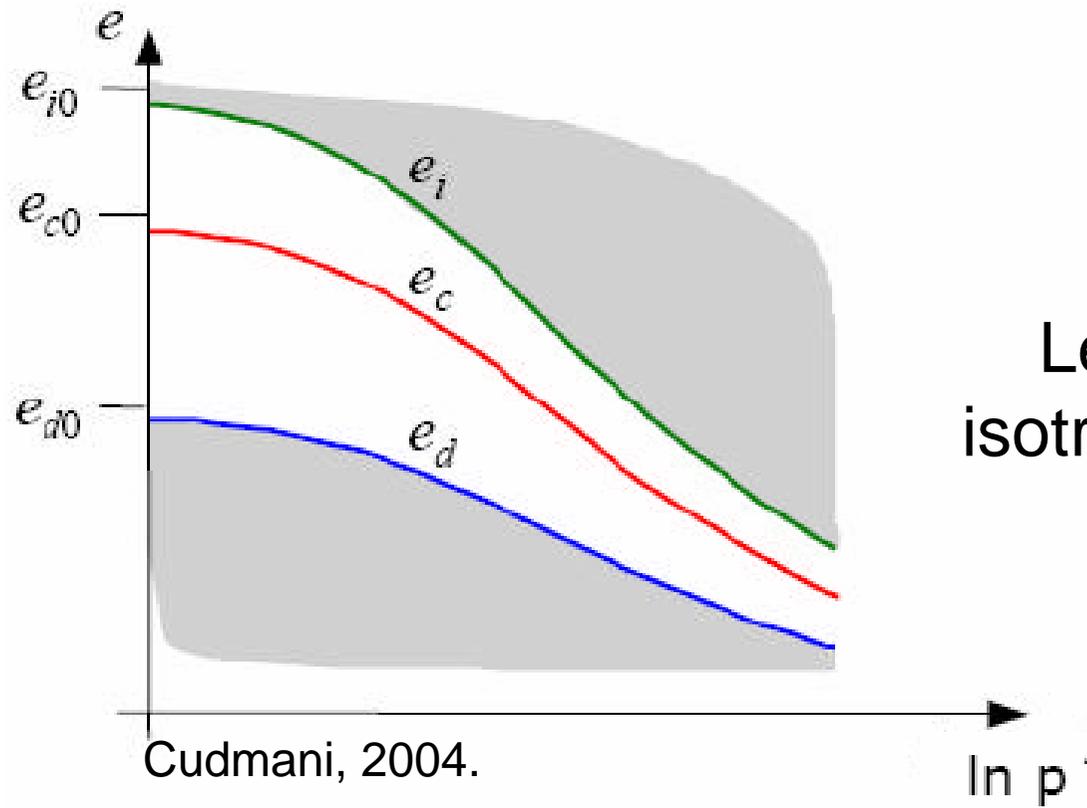
$$\hat{\mathbf{T}}^* = \hat{\mathbf{T}} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \longrightarrow \text{Tensor desviador de esfuerzos}$$

Factor de barotropía

$$f_b$$



Herle & Gudehus, 1999.



Ley de compresión isotrópica, Bauer (1996)

Cudmani, 2004.

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[ - \left( \frac{-trT}{h_s} \right)^n \right]$$

De la ley de compresión se conoce:

$$\overset{\circ}{p}_s = - \left( \frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \frac{h_s}{3ne_i} \overset{\circ}{e}$$

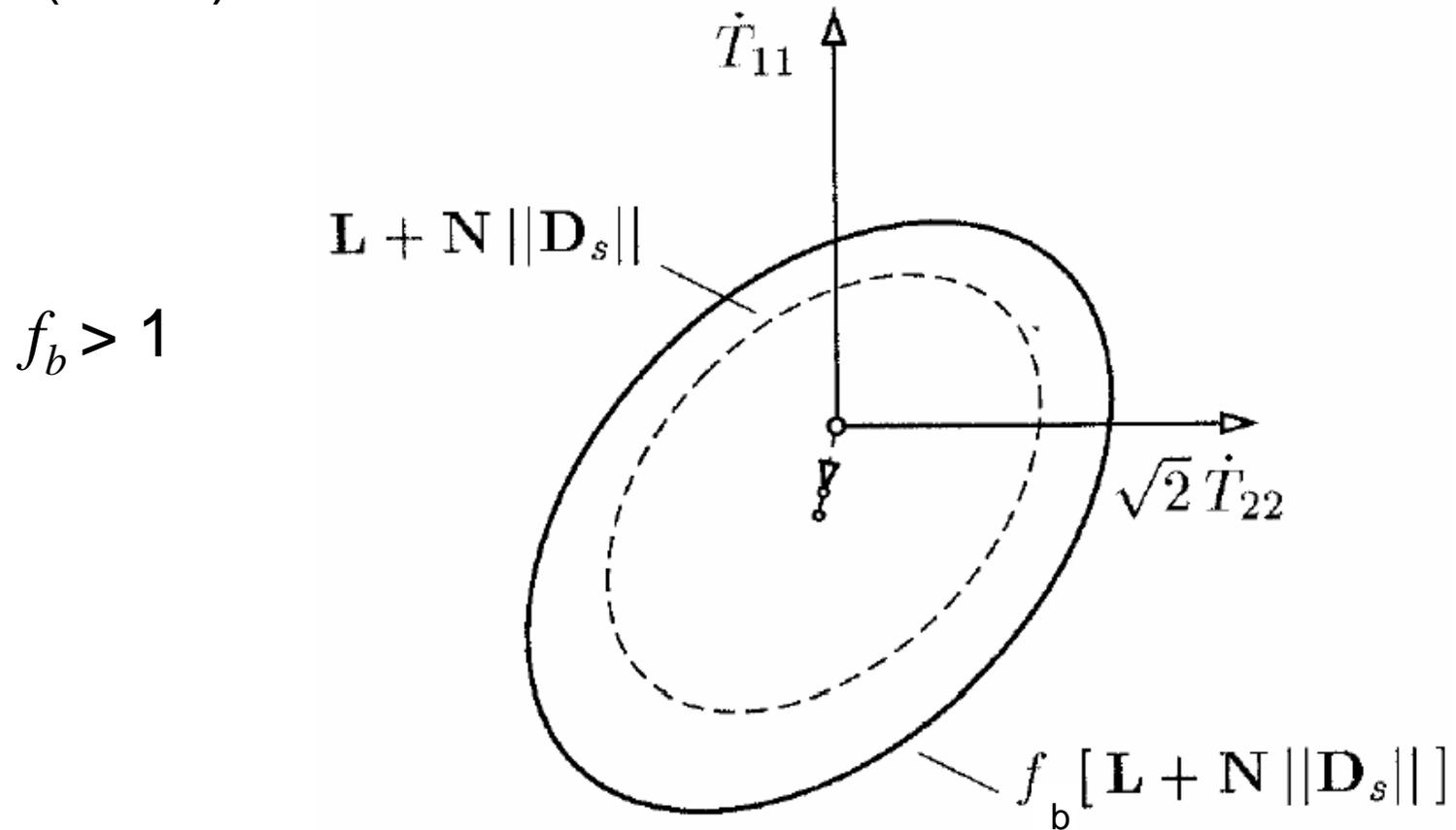
Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares para compresión isotrópica:

$$\overset{\circ}{T}_1 = f_b f_e \left[ 3 + a^2 - f_d a \sqrt{3} \right] D_1$$

Igualando se obtiene:

$$f_s = \left( \frac{e_{io}}{e_{co}} \right)^\beta \frac{h_s}{n} \frac{1 + e_i}{e_i} \left( \frac{-trT}{h_s} \right)^{1-n} \left[ 3 + a^2 - a \sqrt{3} \left( \frac{e_{io} - e_{do}}{e_{co} - e_{do}} \right)^\alpha \right]^{-1}$$

Influencia de  $f_b$  en la envolvente de respuesta,  
Bauer (1996):

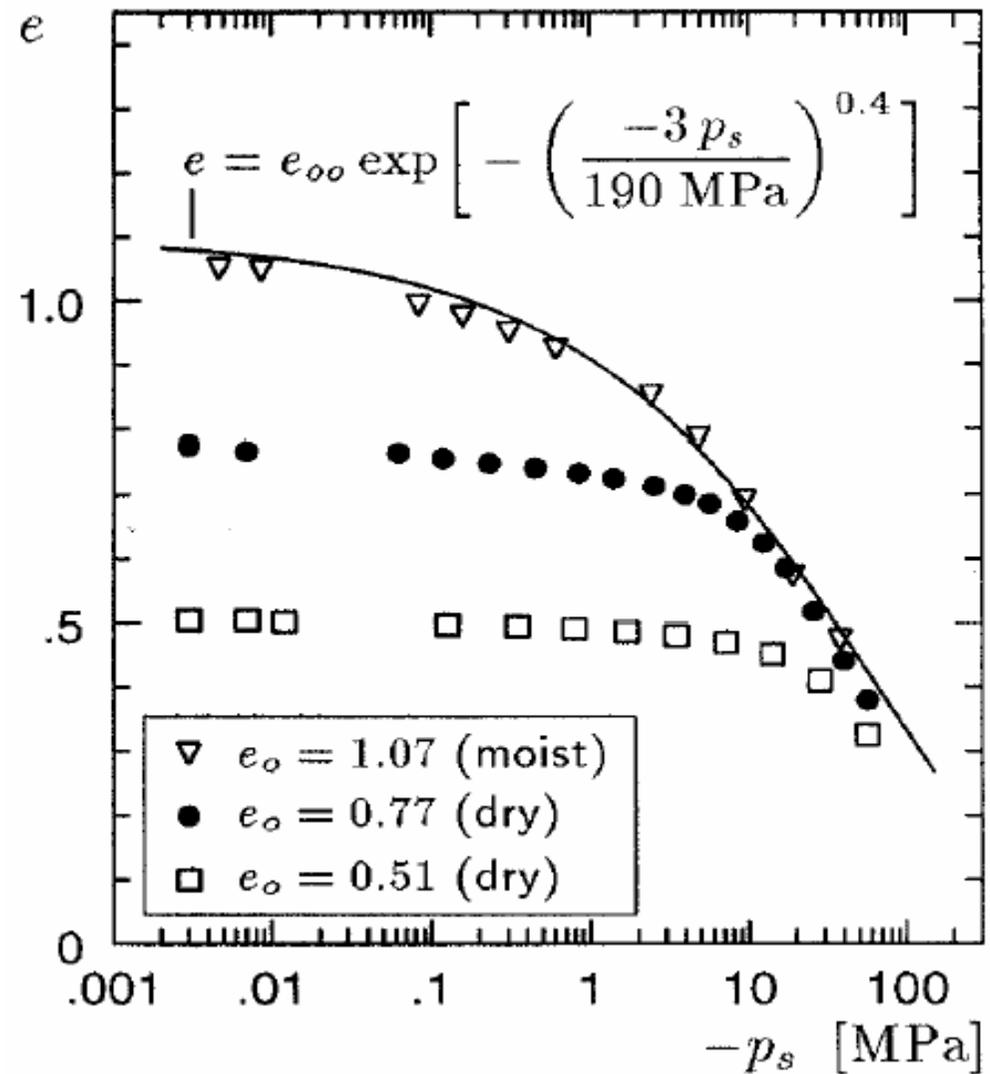


## Factores de picnotropía

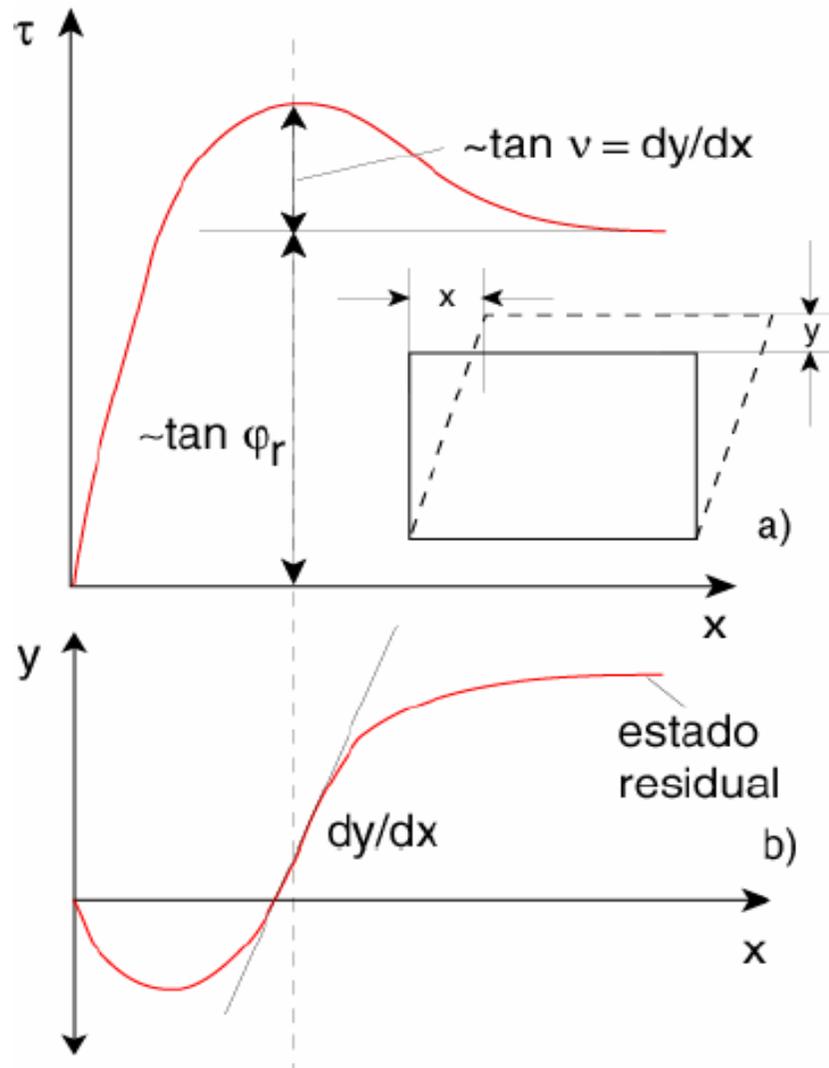
$$f_e, f_d$$

$$f_e = \left( \frac{e_c}{e} \right)^\beta$$

$$f_d = \left( \frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha$$

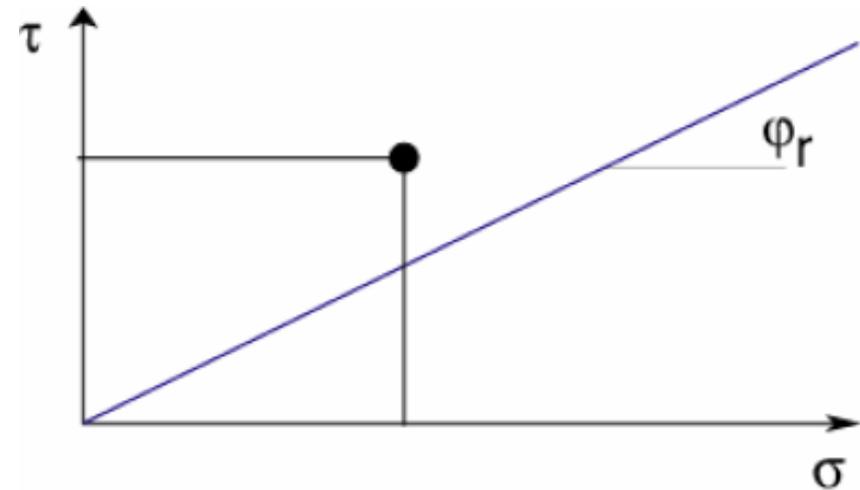


Bauer, 1996.



## Factor de picnotropía

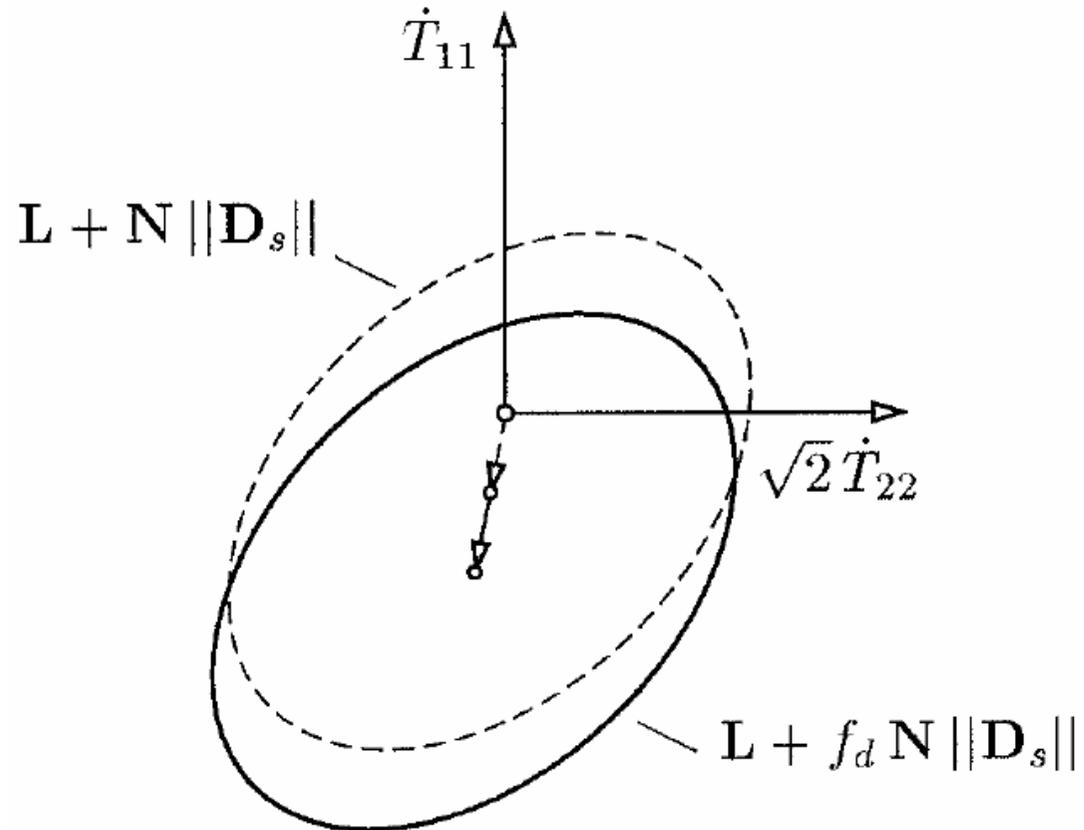
$$f_d$$



Cudmani, 2004.

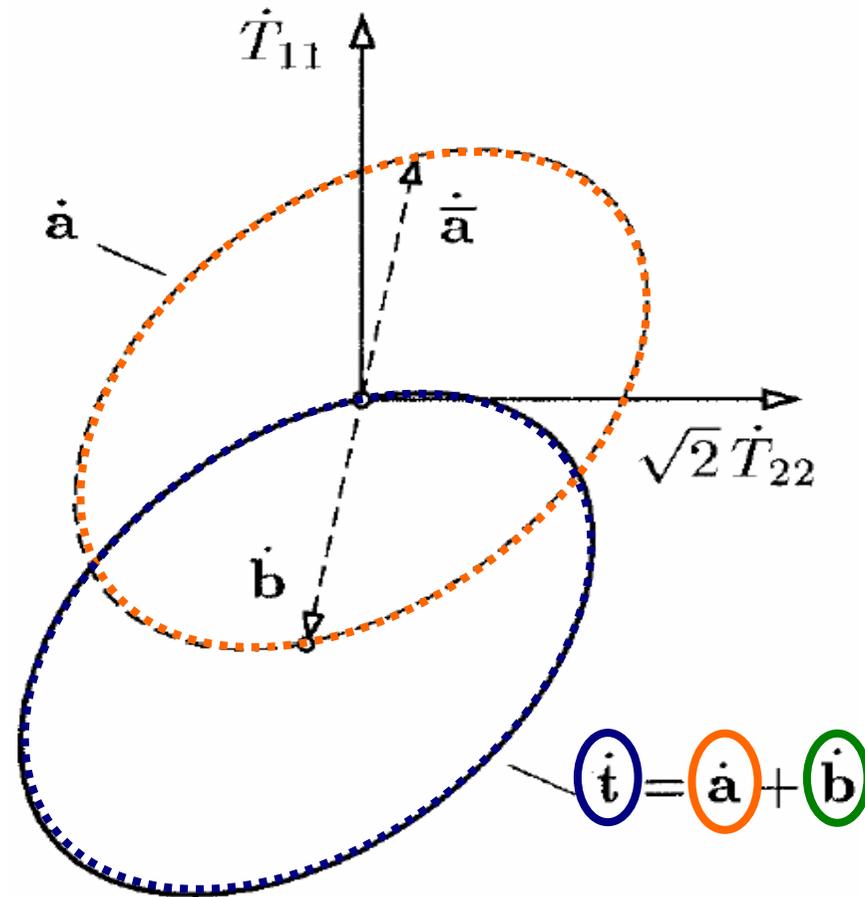
Influencia de  $f_d$  en la envolvente de respuesta,  
Bauer (1996):

$$f_d = \left( \frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha$$



Envolvente de respuesta para el estado límite,  
Bauer (1996):

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$



En el estado límite:  $0 = \mathbf{L} : \mathbf{D} + \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$

$$0 = \mathbf{L} + \mathbf{N}\vec{\mathbf{D}}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = -\mathbf{L}^{-1} : \mathbf{N}$$

Hallando la norma a ambos lados de la ecuación se elimina  $\vec{\mathbf{D}}$  obteniéndose una función de esfuerzo  $y(\mathbf{T})$  que es el “yield surface”:

$$y(\mathbf{T}) = \|\mathbf{L}^{-1} : \mathbf{N}\| - 1 = 0$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1} : \mathbf{N}$$

$$y(\mathbf{T}) = \|\mathbf{B}\| - 1 = 0$$

Igualando con la superficie de Matsuoka - Nakai:

$$y_{M-N}(\mathbf{T}) \equiv -\frac{I_1 I_2}{I_3} + \frac{9 - \sin^2 \varphi_c}{-1 + \sin^2 \varphi_c} = 0$$

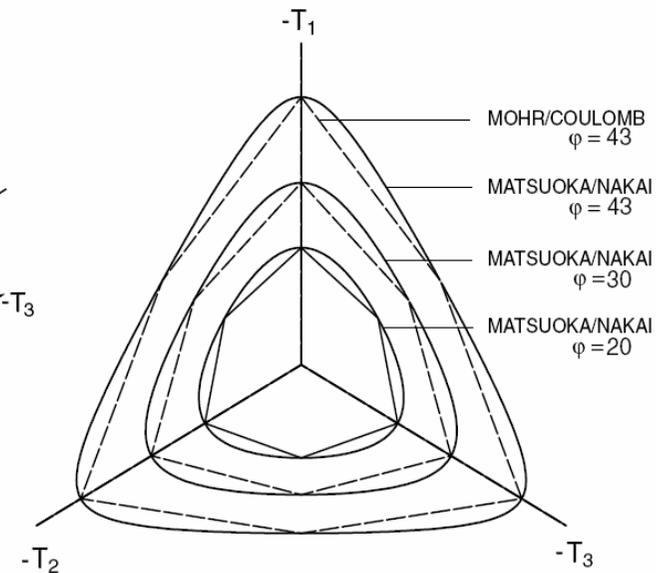
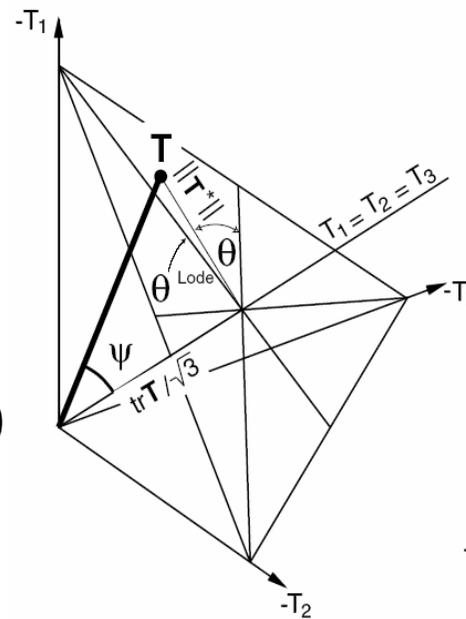
Se obtiene:

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \psi + \frac{2 - \tan^2 \psi}{2 + \sqrt{2} \tan \psi \cos 3\theta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \psi$$

$$\tan \psi = \sqrt{3} \|\hat{T}^*\|$$

$$\cos 3\theta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{T}^* \cdot \hat{T}^* \cdot \hat{T}^*)}{[\hat{T}^* : \hat{T}^*]^{3/2}}$$

$$F = \begin{cases} 1 & \text{si } q/p_s > 0 \\ 1 + q/(3p_s) & \text{si } q/p_s < 0 \end{cases}$$



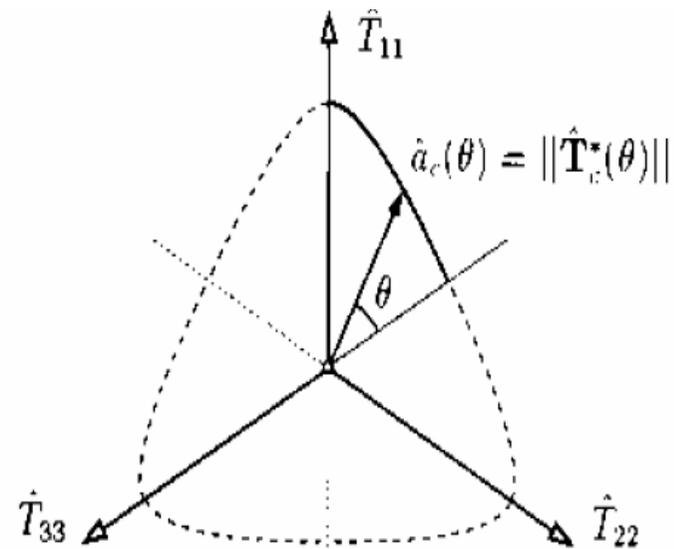
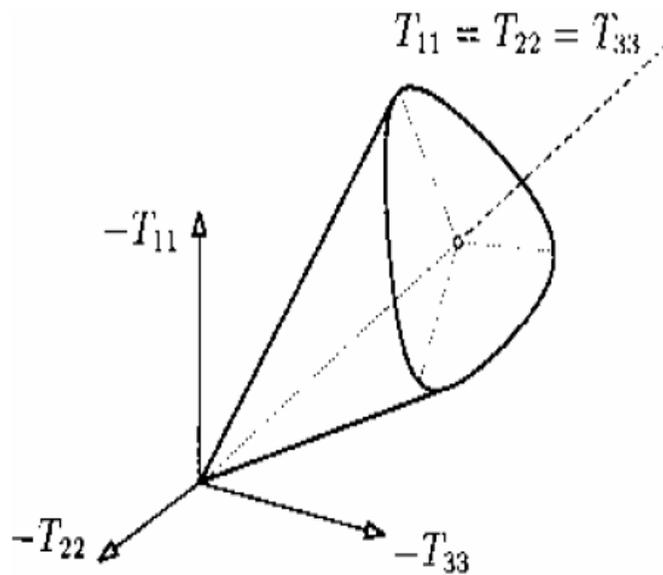
Niemunis, 2003.

Los tensores de rigidez pueden ser escritos como:

$$\mathbf{L} = \frac{f_b f_e}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} a^2 \left( \left( \frac{F}{a} \right)^2 \mathbf{1} + \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}} \right)$$

$$\mathbf{N} = \frac{f_b f_e}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} a^2 \left( \frac{F}{a} \right) (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^*)$$

Donde:  $\hat{a} = \frac{F}{a}$



Niemunis et al, 2000.

### Criterio de falla de Matsuoka - Nakai

Para calcular  $a$ , se reduce la ecuación tensorial hipoplástica a cantidades escalares:

$$\dot{T}_1 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_1 + a^2 \frac{T_1 D_1 + 2T_2 D_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_1 + f_d \frac{a}{3} \frac{5T_1 - 2T_2}{T_1 + 2T_2} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2} \right]$$

$$\dot{T}_2 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_2 + a^2 \frac{T_1 D_1 + 2T_2 D_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_2 + f_d \frac{a}{3} \frac{4T_2 - T_1}{T_1 + 2T_2} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2} \right]$$

Si se presenta alta deformación monótonica de corte (p.e. triaxial):

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 = \dot{T}_2 = D_1 + 2D_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin \varphi = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3} (3 - \text{sen } \varphi_c)}{2 \sqrt{2} \text{sen } \varphi_c} \\ D_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

$$\overset{\circ}{T}_1 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_1 + a^2 \frac{T_1 D_1 + 2T_2 D_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_1 + f_d \frac{a}{3} \frac{5T_1 - 2T_2}{T_1 + 2T_2} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2} \right]$$

$$\overset{\circ}{T}_2 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_2 + a^2 \frac{T_1 D_1 + 2T_2 D_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_2 + f_d \frac{a}{3} \frac{4T_2 - T_1}{T_1 + 2T_2} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2} \right]$$

$$\overset{\circ}{e} = (1 + e) tr \mathbf{D}$$

Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares para compresión isotrópica:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

$$\overset{\circ}{T}_1 = \overset{\circ}{T}_2 = \overset{\circ}{T}_3$$

$$D_1 = D_2 = D_3$$

$$\overset{\circ}{T}_1 = f_b f_e \left[ 3 + a^2 - f_d a \sqrt{3} \right] D_1$$

h<sub>test</sub> – isotrópico

Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares para compresión edométrica:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

$$\dot{T}_2 = \dot{T}_3$$

$$D_2 = D_3 = 0$$

$$\dot{T}_1 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_1 + a^2 \frac{T_1^2}{(T_1 + 2T_2)^2} D_1 + f_d \frac{a}{3} \frac{5T_1 - 2T_2}{T_1 + 2T_2} |D_1| \right]$$

$$\dot{T}_2 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ a^2 \frac{T_1 T_2}{(T_1 + 2T_2)^2} D_1 + f_d \frac{a}{3} \frac{4T_2 - T_1}{T_1 + 2T_2} |D_1| \right]$$

h<sub>test</sub> – edométrico

Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares para compresión triaxial no drenada:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

$$\dot{T}_2 = \dot{T}_3$$

$$D_2 = D_3 = -\frac{1}{2}D_1$$

$$\dot{T}_1 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ D_1 + a^2 \frac{T_1(T_1 - T_2)}{(T_1 + 2T_2)^2} D_1 + f_d \frac{a}{\sqrt{6}} \frac{5T_1 - 2T_2}{T_1 + 2T_2} |D_1| \right]$$

$$\dot{T}_2 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ -\frac{1}{2}D_1 + a^2 \frac{T_1(T_1 - T_2)}{(T_1 + 2T_2)^2} D_1 + f_d \frac{a}{\sqrt{6}} \frac{4T_2 - T_1}{T_1 + 2T_2} |D_1| \right]$$

htest – no drenado

Ecuación tensorial hipoplástica reducida a cantidades escalares para compresión triaxial drenada:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

$$\overset{\circ}{T}_2 = \overset{\circ}{T}_3 = 0$$

$$D_2 = D_3$$

$$\overset{\circ}{T}_1 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ \overset{\circ}{D}_1 + a^2 \frac{T_1 \overset{\circ}{D}_1 + 2T_2 \overset{\circ}{D}_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_1 + f_d \frac{a}{3} \frac{5T_1 - 2T_2}{T_1 + 2T_2} \sqrt{\overset{\circ}{D}_1^2 + 2\overset{\circ}{D}_2^2} \right]$$

$$\overset{\circ}{T}_2 = f_b f_e \frac{(T_1 + 2T_2)^2}{T_1^2 + 2T_2^2} \left[ \overset{\circ}{D}_2 + a^2 \frac{T_1 \overset{\circ}{D}_1 + 2T_2 \overset{\circ}{D}_2}{(T_1 + 2T_2)^2} T_2 + f_d \frac{a}{3} \frac{4T_2 - T_1}{T_1 + 2T_2} \sqrt{\overset{\circ}{D}_1^2 + 2\overset{\circ}{D}_2^2} \right]$$

- Datos desconocidos
- Datos conocidos

h<sub>test</sub> – drenado

# CONTENIDO

GENERALIDADES

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

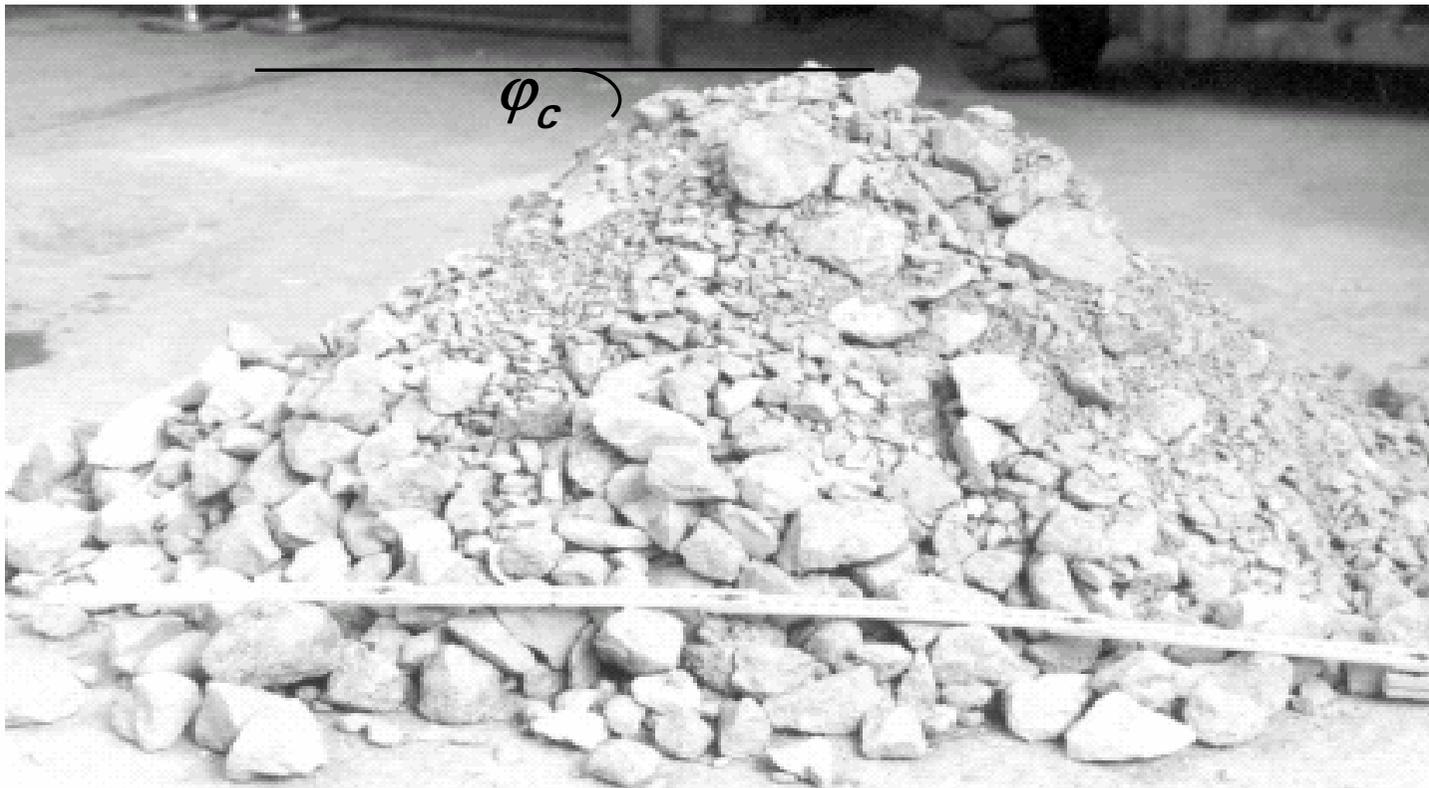
BIBLIOGRAFÍA

Resumen de ensayos:

<b>Ensayo</b>	<b>Parámetro</b>
Ángulo de reposo	$\varphi_c$
$e_{m\acute{a}x}, e_{m\acute{i}n}$	$e_{i0}, e_{c0}, e_{d0}$
Compresión edométrica	$h_s, n, \beta$
Triaxial drenado	$\alpha$

## *Introducción a la Hipoplasticidad*

- $\varphi_c \cong$  ángulo de reposo (valores similares a los obtenidos en pruebas de corte o triaxiales).



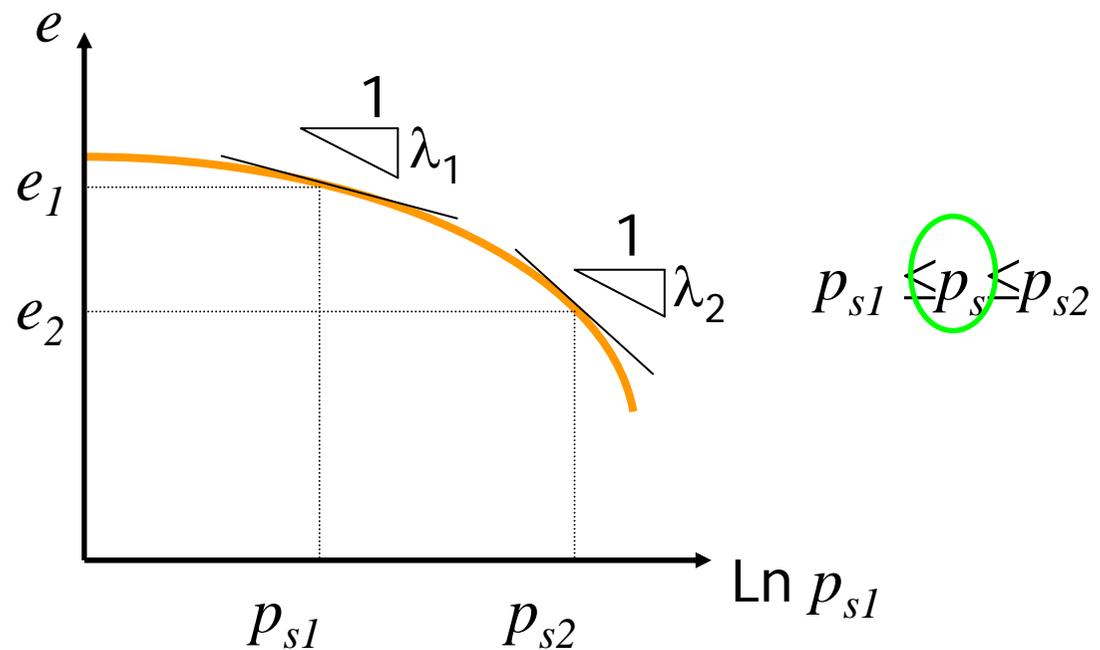
Herle, 2000.

## Introducción a la Hipoplasticidad

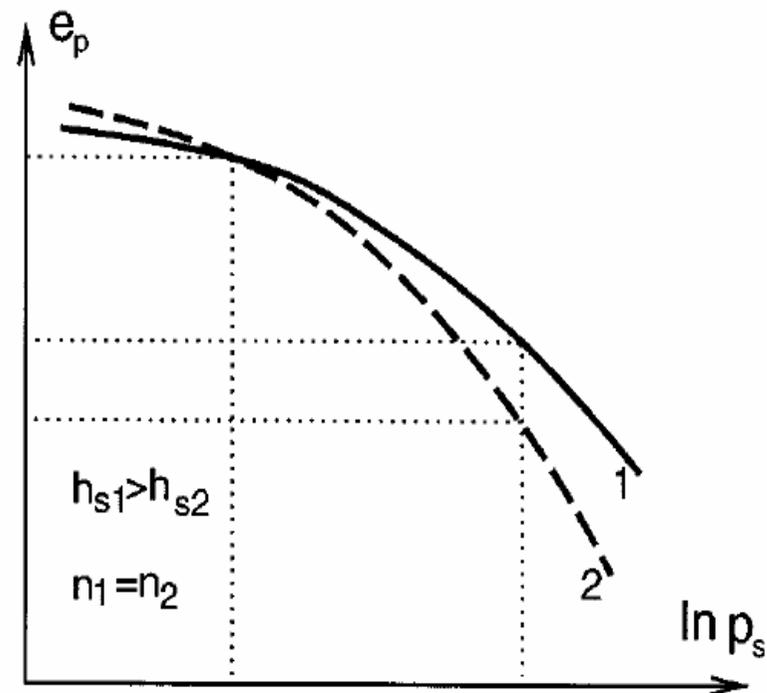
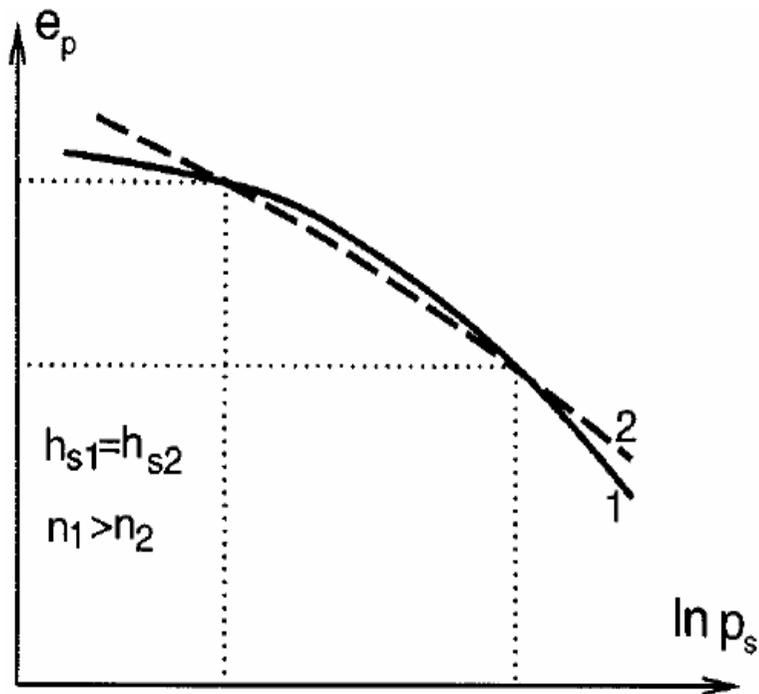
- $e_{co} \cong e_{m\acute{a}x}$ ,  $e_{do} \cong e_{m\acute{i}n}$   $e_{io} \cong 1.1 - 1.2 e_{m\acute{a}x}$
- $h_s$  (dureza granular) y  $n$ , se obtienen de la curva  $e - p_s$  de una prueba edométrica:

$$n = \frac{\ln \left( \frac{e_1 \lambda_1}{e_2 \lambda_2} \right)}{\ln \left( \frac{p_{s2}}{p_{s1}} \right)}$$

$$h_s = 3 p_s \left( \frac{ne}{\lambda} \right)^{\frac{1}{n}}$$



$n$  refleja la curvatura y  $h_s$  la pendiente de la ley de compresión.



Herle & Gudehus, 1999.

De la mecánica de suelos se conoce:

$$K = \frac{\overset{\circ}{p}_s}{trD} \quad C_c = \frac{-de}{d \ln \left( \frac{T_{s1}}{T_{s0}} \right)}$$

Donde,  $K$ : Módulo volumétrico.

$C_c$ : Índice de compresibilidad.

De la ley de compresión se conoce:

$$\overset{\circ}{p}_s = - \left( \frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \frac{h_s}{3ne_o} \overset{\circ}{e}$$

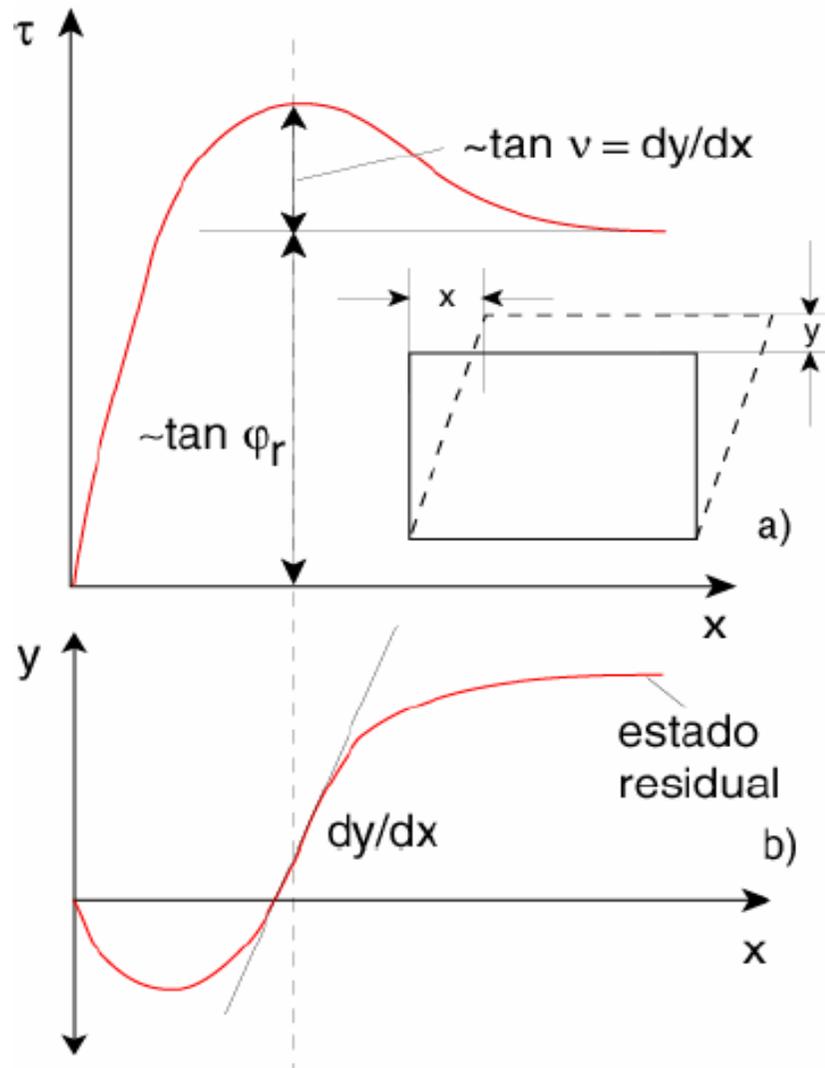
Igualando la anterior ecuación con la hipoplástica y despejando  $h_s$  se obtiene:

$$h_s = 3 p_s \left( \frac{n e}{C_c} \right)^{1/n}$$

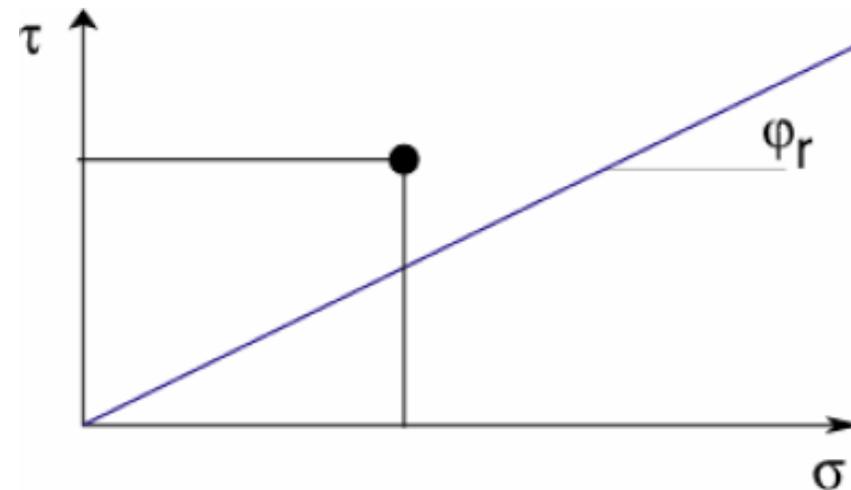
$n$  se obtiene de la ecuación de  $h_s$ , relacionando  $n_1$  y  $n_2$  (estado suelto y denso respectivamente):

$$n = \frac{\ln \left( \frac{e_1 \lambda_1}{e_2 \lambda_2} \right)}{\ln \left( \frac{p_{s2}}{p_{s1}} \right)}$$

## Introducción a la Hipoplasticidad



$\alpha$  controla la diferencia entre  $\varphi_p$  y  $\varphi_c$  con el incremento de la densidad relativa.



Cudmani, 2004.

Conociendo  $T_{s1}$  y  $e$  en el estado pico (alta deformación cortante) de una prueba de compresión triaxial,

$$\overset{\circ}{T}_{s1} = \overset{\circ}{T}_{s2} = \overset{\circ}{T}_{s3} = 0$$

y sustituyendo en la ecuación general hipoplástica:

$$\alpha = \frac{\ln \left[ 6 \frac{(2 + K_p)^2 + a^2 K_p (K_p - 1 - \tan v_p)}{a(2 + K_p)(5K_p - 2) \sqrt{4 + 2(1 + \tan v_p)^2}} \right]}{\ln((e - e_d)/(e_c - e_d))} \quad K_p = \frac{T_1}{T_2}$$
$$\tan v_p = -\frac{D_1 + 2D_2}{D_1}$$

Donde  $v_p$ : ángulo de dilatancia.

## *Introducción a la Hipoplasticidad*

$\beta$  tiene en cuenta el cambio que sufre la rigidez ( $E$ ) debido al estado del material y controla además la posición del estado “pico”.

$$E = \frac{\overset{\circ}{T}_{s1}}{D_1}$$

Ecuación hipoplástica en compresión isotrópica:

$$\overset{\circ}{T}_{s1} = f_b f_e \left[ 3 + a - f_d a \sqrt{3} \right] D$$

Relacionando la rigidez del material en estado denso y suelto ( $E_2/E_1$ , respectivamente) se obtiene:

$$\beta = \frac{\ln\left(\beta_o \frac{E_2}{E_1}\right)}{\ln \frac{e_1}{e_2}}$$
$$\beta_o = \frac{3 + a^2 - a\sqrt{3}f_{d1}}{3 + a^2 - a\sqrt{3}f_{d2}}$$

$e_1, e_2$ : relación de vacíos en estado suelto y denso respectivamente.

## Introducción a la Hipoplasticidad

Material	$\varphi_c$ [°]	$h_s$ [MPa]	$n$	$e_{d0}$	$e_{c0}$	$e_{i0}$	$\alpha$	$\beta$
Toyoura sand	30	2600	0,27	0,61	0,98	1,10	0,18	1,00
Hochstetten sand	33	1000	0,25	0,55	0,95	1,05	0,25	1,00
Schlabendorf sand	33	1600	0,19	0,44	0,85	1,00	0,25	1,00
Hostun sand	31	1000	0,29	0,61	0,91	1,09	0,13	2,00
Karlsruhe sand	30	5800	0,28	0,53	0,84	1,00	0,13	1,05
Zbraslav sand	31	5700	0,25	0,52	0,82	0,95	0,23	1,00
Ottawa sand	30	4900	0,29	0,49	0,76	0,88	0,10	1,00
Ticino sand	31	5800	0,31	0,60	0,93	1,05	0,20	1,00
SLB sand	30	8900	0,33	0,49	0,79	0,90	0,14	1,00
Hochstetten gravel	36	32000	0,18	0,26	0,45	0,50	0,10	1,80
Plastics	32	110	0,33	0,53	0,73	0,80	0,08	1,00
Limestone rockfill	38	10	0,36	0,31	0,68	0,78	0,10	3,10
Sedlec loess	30	0,79	0,13	0,73	1,37	1,58	0,15	1,00
Wheat	39	20	0,37	0,57	0,84	0,95	0,02	1,00

# CONTENIDO

GENERALIDADES

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (1D)

ECUACIÓN CONSTITUTIVA HIPOPLÁSTICA (3D)

DETERMINACIÓN PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS

**BIBLIOGRAFÍA**

## *Introducción a la Hipoplasticidad*

Bauer, E. Calibration of comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils and Foundations*, **36**(1):13-26, 1996.

Cudmani, R. Aspectos fundamentales del comportamiento de suelos desde una perspectiva histórica y su modelación a través de relaciones constitutivas hipoplásticas. Instituto de Mecánica de Suelos y Mecánica de Rocas. Universidad de Karlsruhe (Alemania).

Cudmani, R. Notas de clase. Instituto de Mecánica de Suelos y Rocas (IBF), Universidad Fridericiana de Karlsruhe. 2004.

Fellin, W. Hypoplasticity for beginners. 2002.

Gudehus, G. A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations*, **36**(1):1-12, 1996.

Herle, I. Granulometric limits of hypoplastic models. Institute of Theoretical and Applied Mechanics. Czech Academic of Sciences. 2000.

Herle, I. & Gudehus, G. Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies. *Mechanics of Cohesive frictional Materials*, **4**(5), S.461-486, 1999.

Kolymbas, D. Introduction to Hypoplasticity. University of Innsbruck, Institute of Geotechnics and Tunnelling. 2000.

Kolymbas, D. & Herle, I. Shear and objective stress rates in hypoplasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. **27**:733-744. 2003.

Kolymbas, D., Herle, I & Wolfersdorff, P.–A. Hypoplastic constitutive equation with internal variables. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. **19**:415-436. 1995.

Niemunis A. (2003). Extended hypoplastic models for soils. Ph. D. thesis, Politechnika Gdńska. Habilitation, Monografía 34.

Niemunis A., Herle I. Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range, *Mechanics of Cohesive frictional Materials*, Vol. 2, (1997), 279-299.

Niemunis, A., Nuebel, K. & Karcher, Ch. The consistency conditions for density limits of hypoplastic constitutive law. 2000.

Wolffersdorff, P.–A. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive frictional Materials*, Vol. 1, (1996), 251-271.

Wu, W. & Kolymbas, D. Numerical Testing of the stability criterion for hypoplastic constitutive equations. *Mechanics of Materials*, **9**:245-253. 1990.

Wu, W., Bauer, E. & Kolymbas, D. Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. *Mechanics of Materials*, **23**:45-69, 1996.

