

MODELO VISCOHIPOPLÁSTICO

Universidad de los Andes

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental

William Mario Fuentes Lacouture



Contenido

1) Observación experimental de los suelos finos

- Resultados experimentales
- Efectos viscosos
- Descripción matemática

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

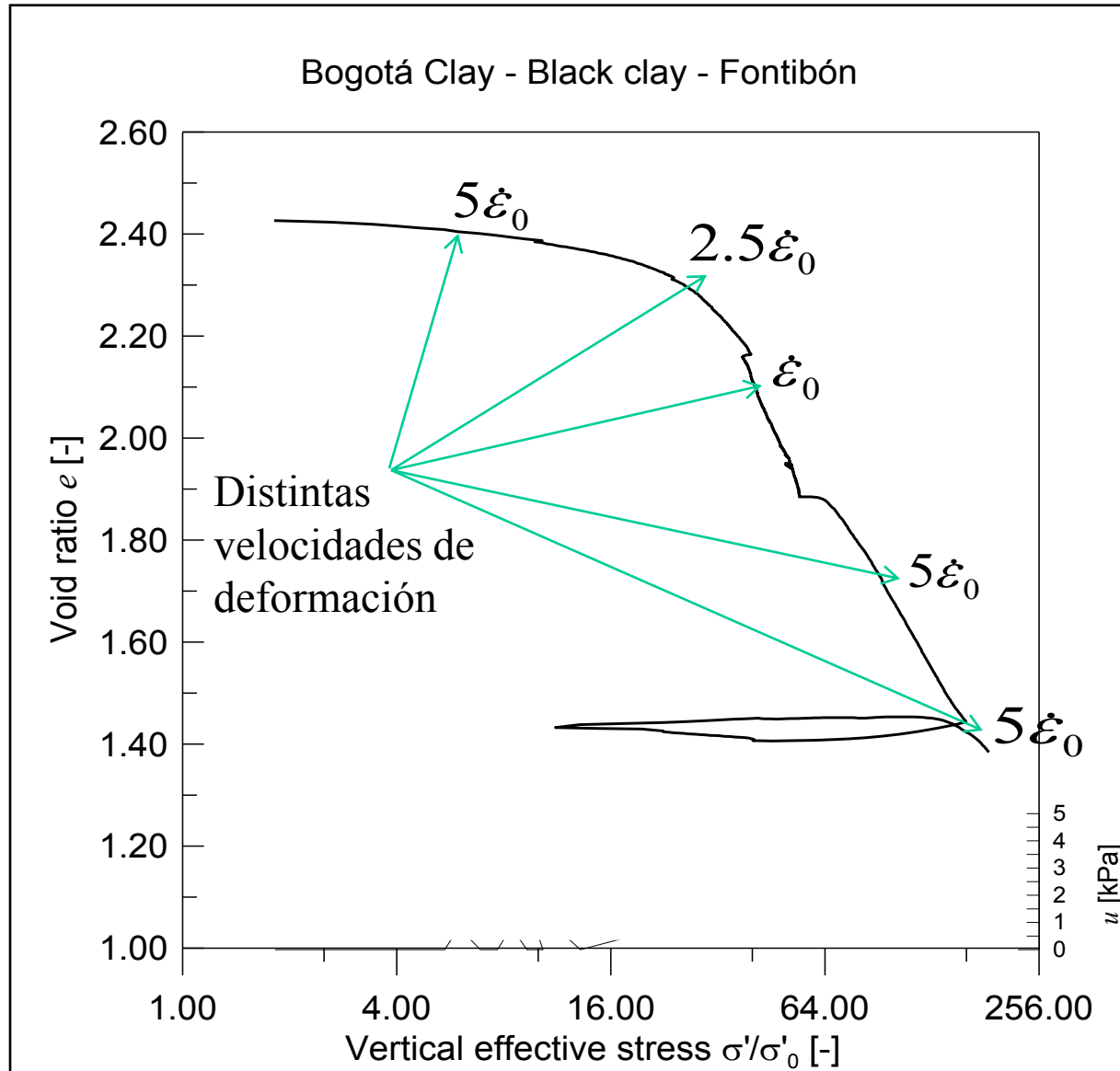
- Derivación de la ecuación constitutiva en 1D

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

- De Hipoplasticidad a Visco-hipoplasticidad
- Factor de barotropía
- Definición OCR
- Tasa de deformación viscosa
- Valores de referencia y parámetros del modelo

1) Observación experimental de los suelos finos

1) Observación experimental de los suelos finos



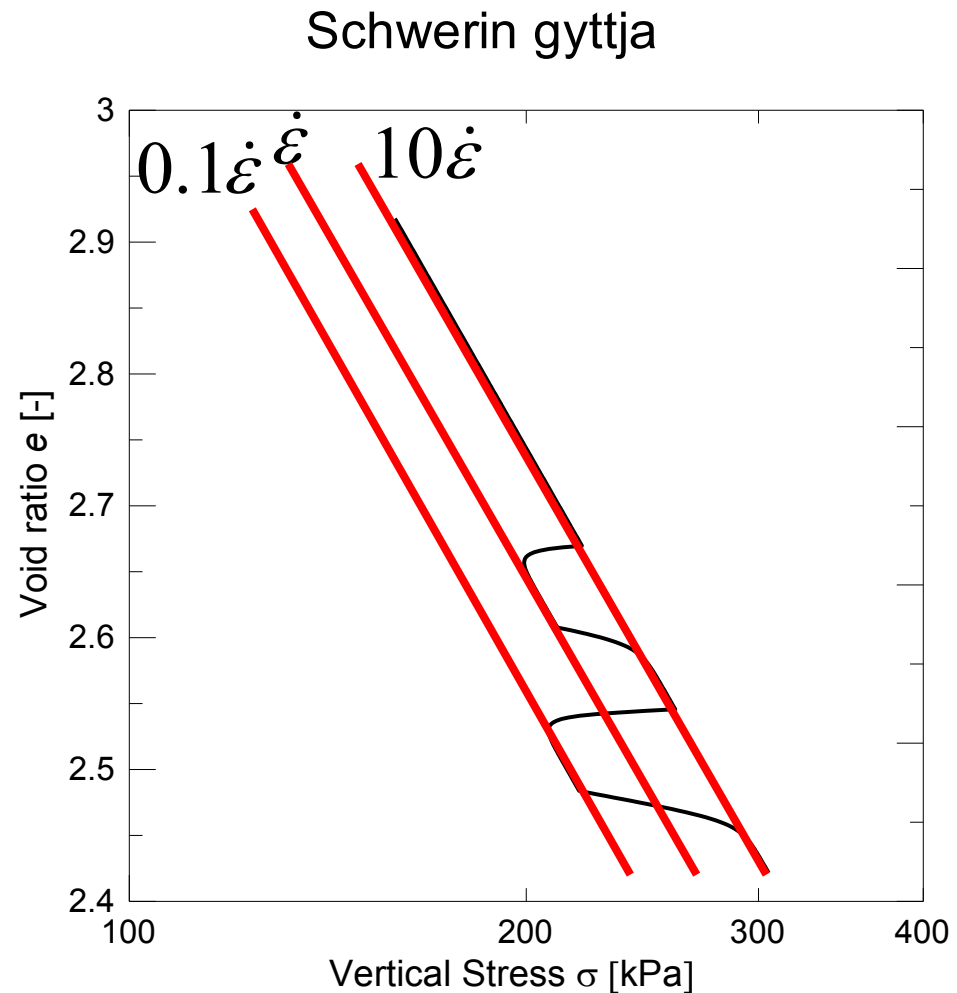
Ensayo de Consolidación oedométrica

Hoyos (2004)

1) Observación experimental de los suelos finos

Ensayo de
Consolidación
oedométrica

- **Dependencia de la tasa de deformación**

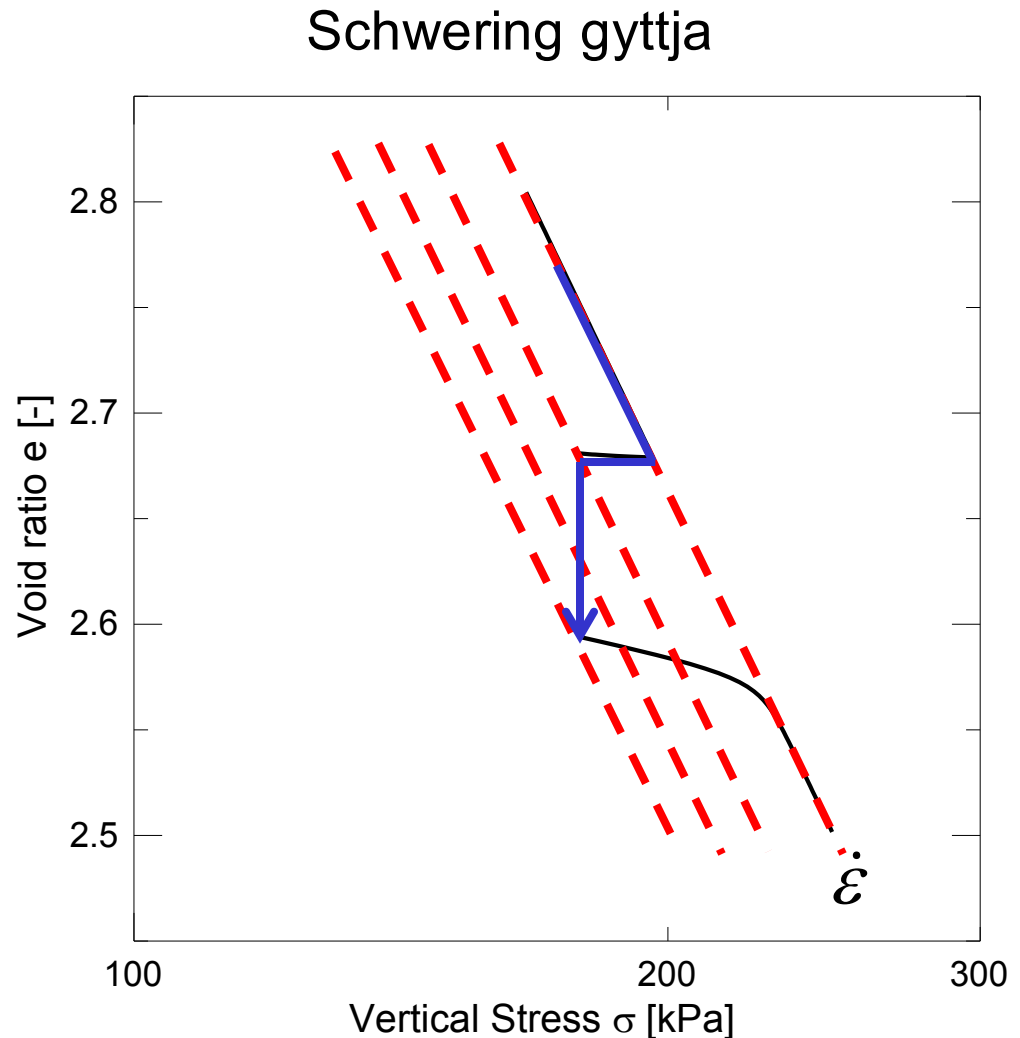


1) Observación experimental de los suelos finos

Ensayo de
Consolidación
oedométrica

- **Creep**

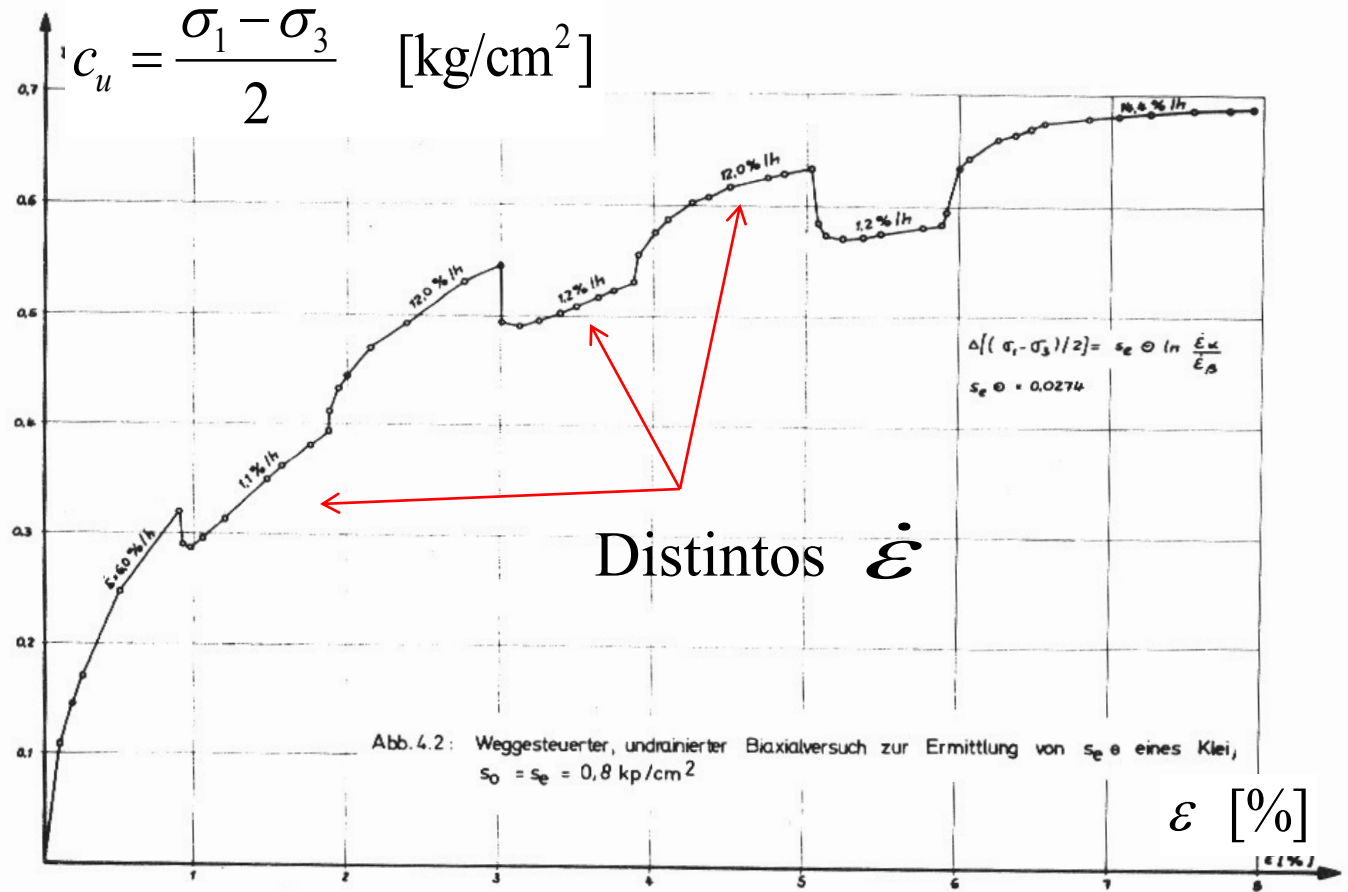
($e \downarrow$ con $\sigma' = k_{te}$)



1) Observación experimental de los suelos finos

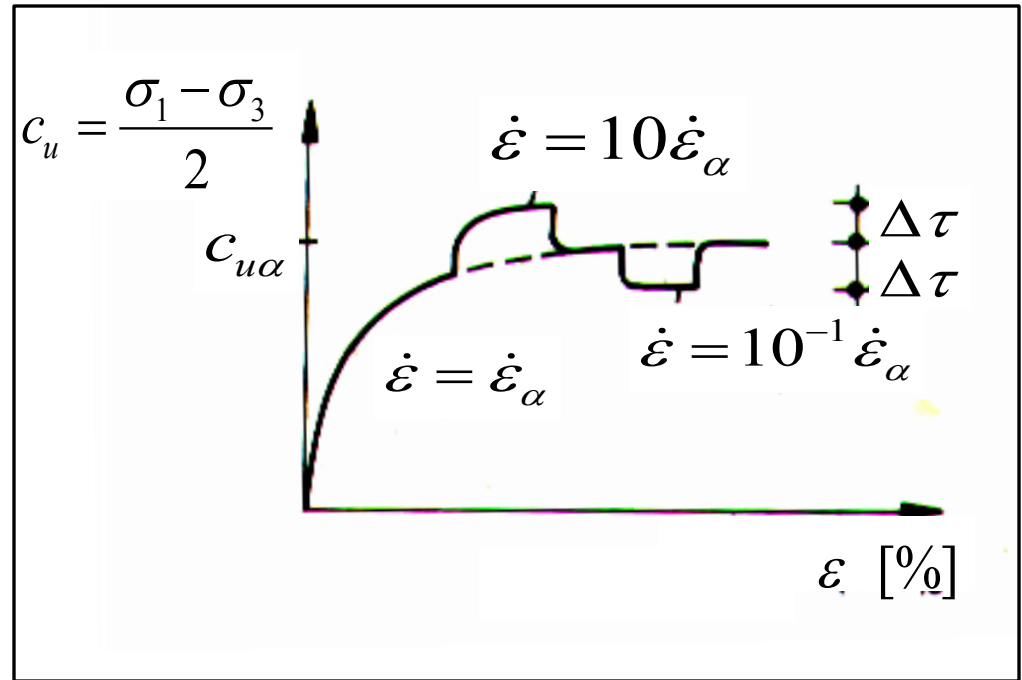
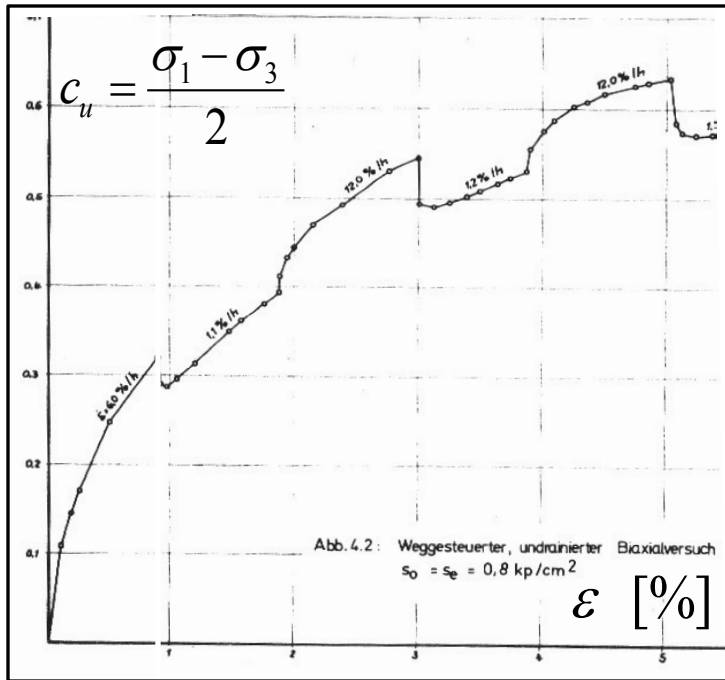
Ensayo biaxial
no drenado

- Resistencia
del suelo



Leinenkugel (1973)

1) Observación experimental de los suelos finos



$$c_u = c_{u\alpha} \left[1 + I_{v\alpha} \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_\alpha} \right) \right]$$

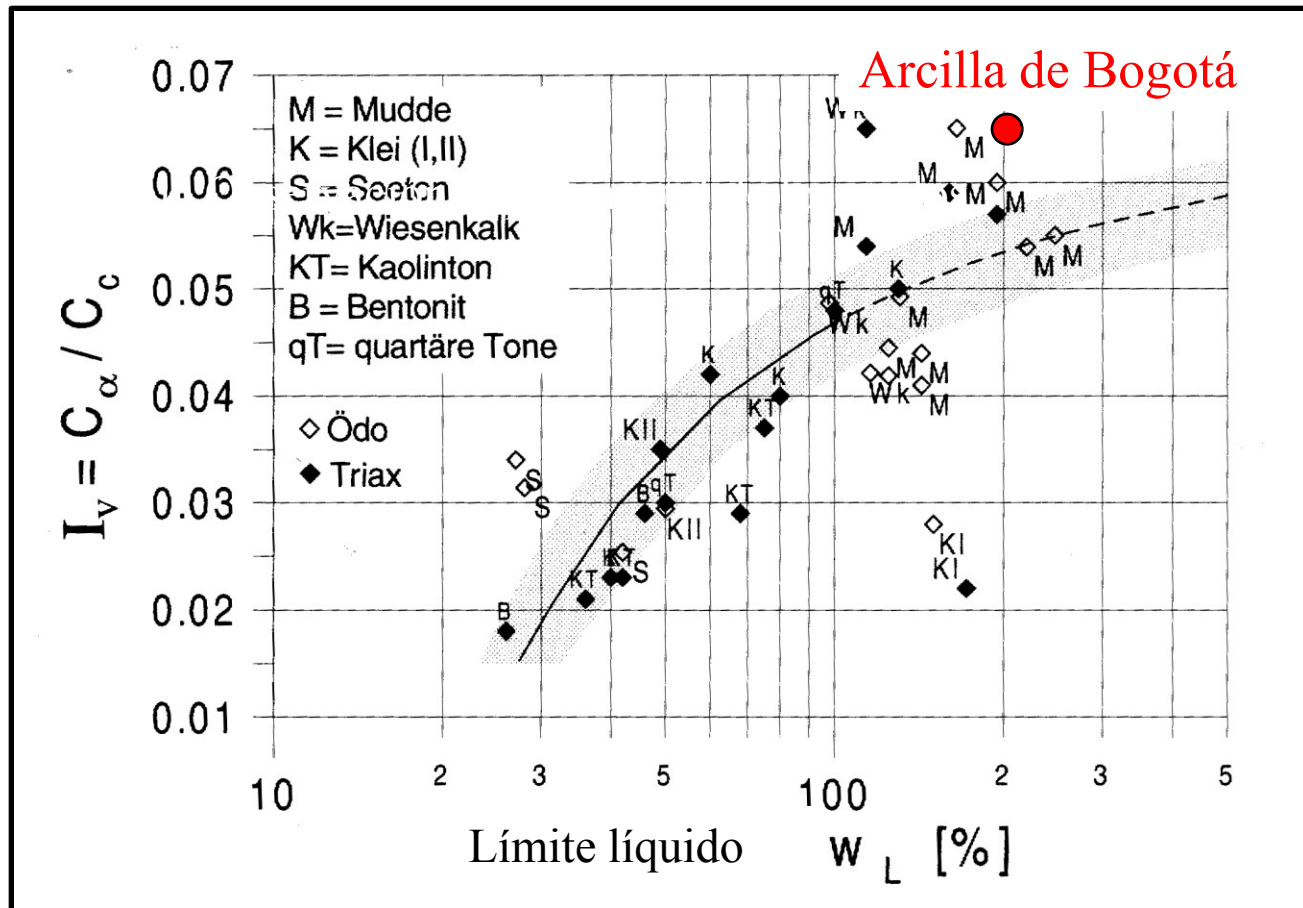
$I_{v\alpha}$: Índice de viscosidad

$\dot{\epsilon}_\alpha$: Velocidad de referencia

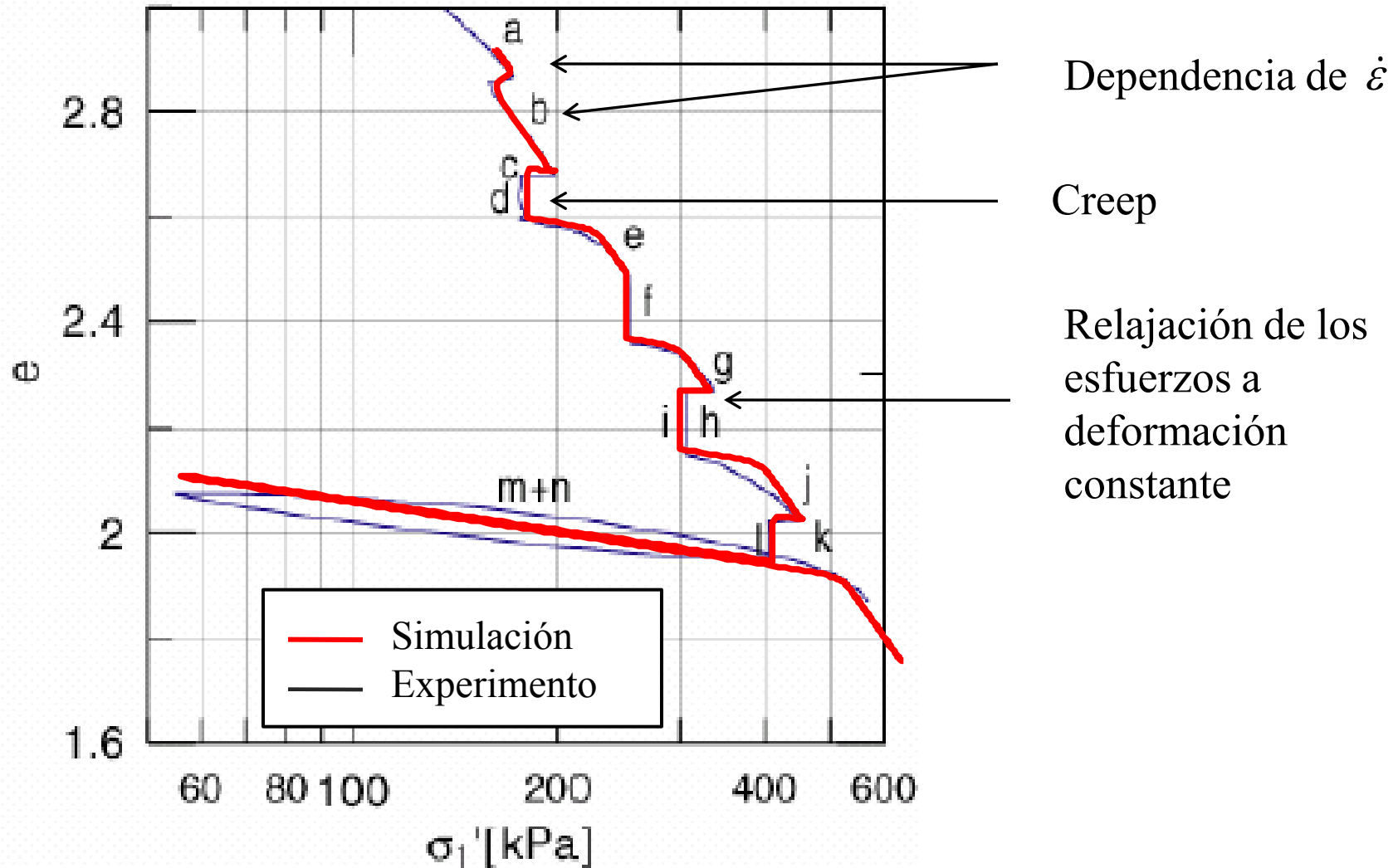
Leinenkugel (1973)

1) Observación experimental de los suelos finos

El índice de viscosidad I_v se puede correlacionar con el límite líquido w_L :



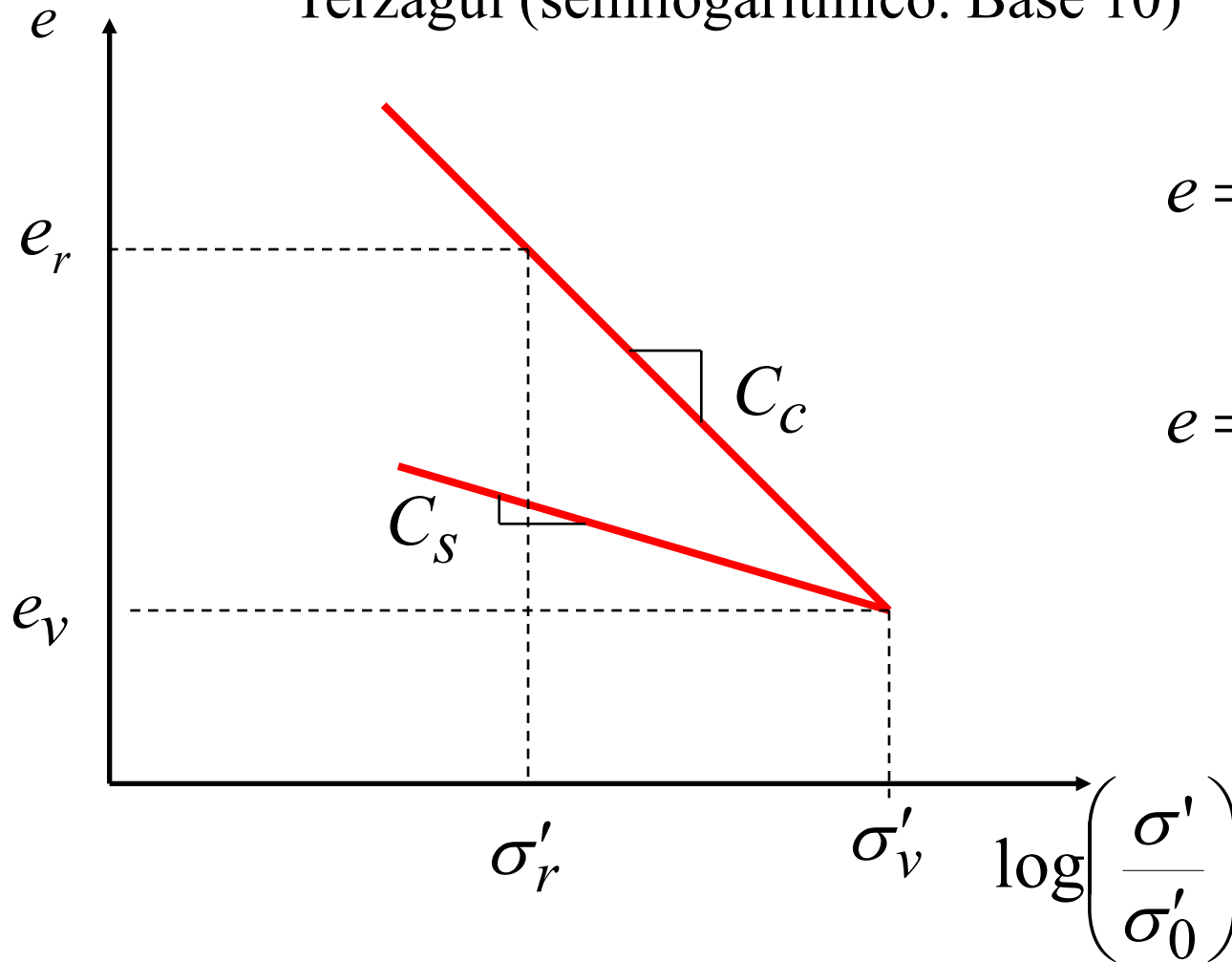
1) Observación experimental de los suelos finos



Krieg (1995)

Descripción matemática

Terzagui (semilogaritmico. Base 10)

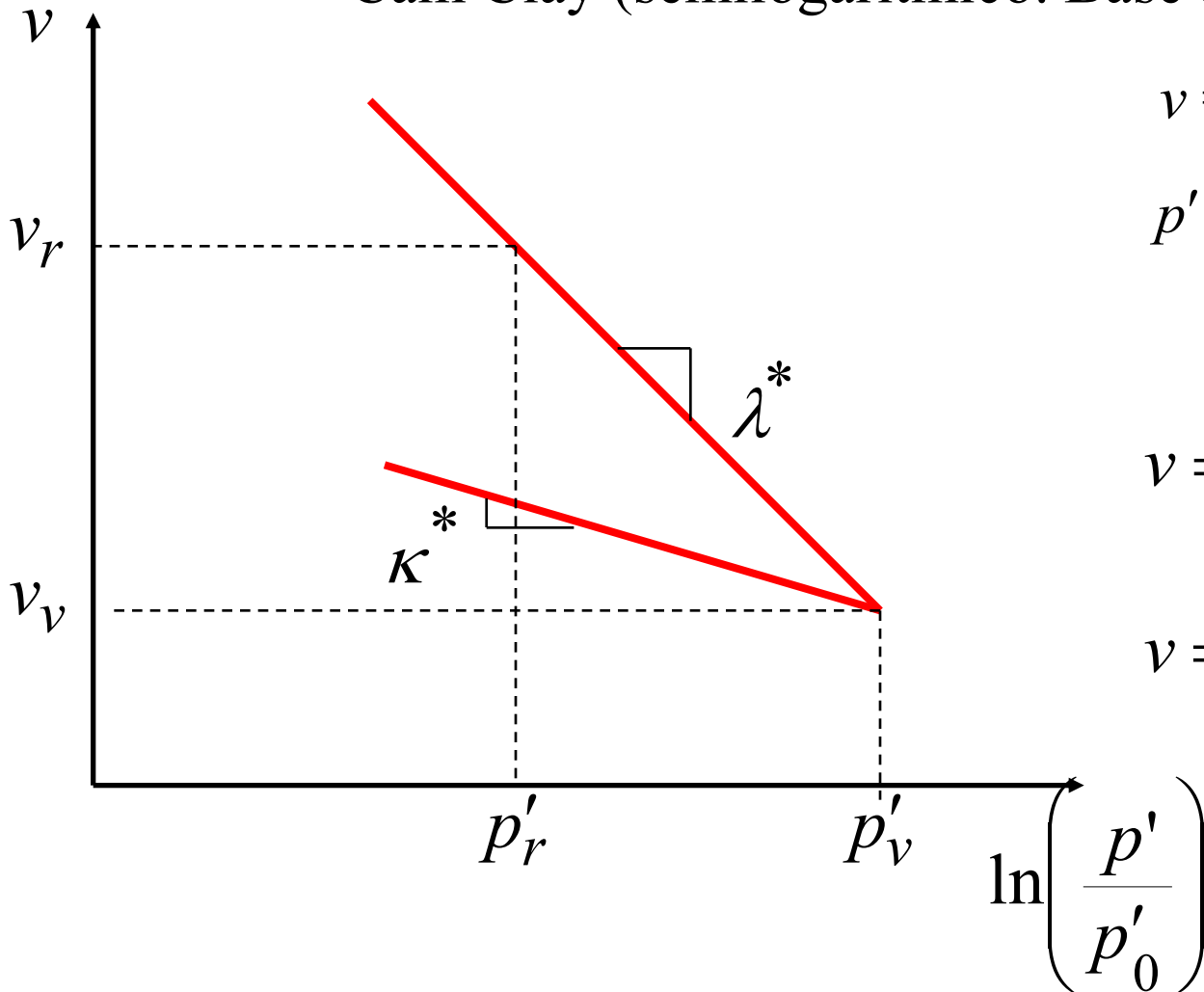


$$e = e_r - C_c \log\left(\frac{\sigma'}{\sigma'_r}\right)$$

$$e = e_v - C_s \log\left(\frac{\sigma'}{\sigma'_v}\right)$$

Descripción matemática

Cam Clay (semilogaritmico. Base e)



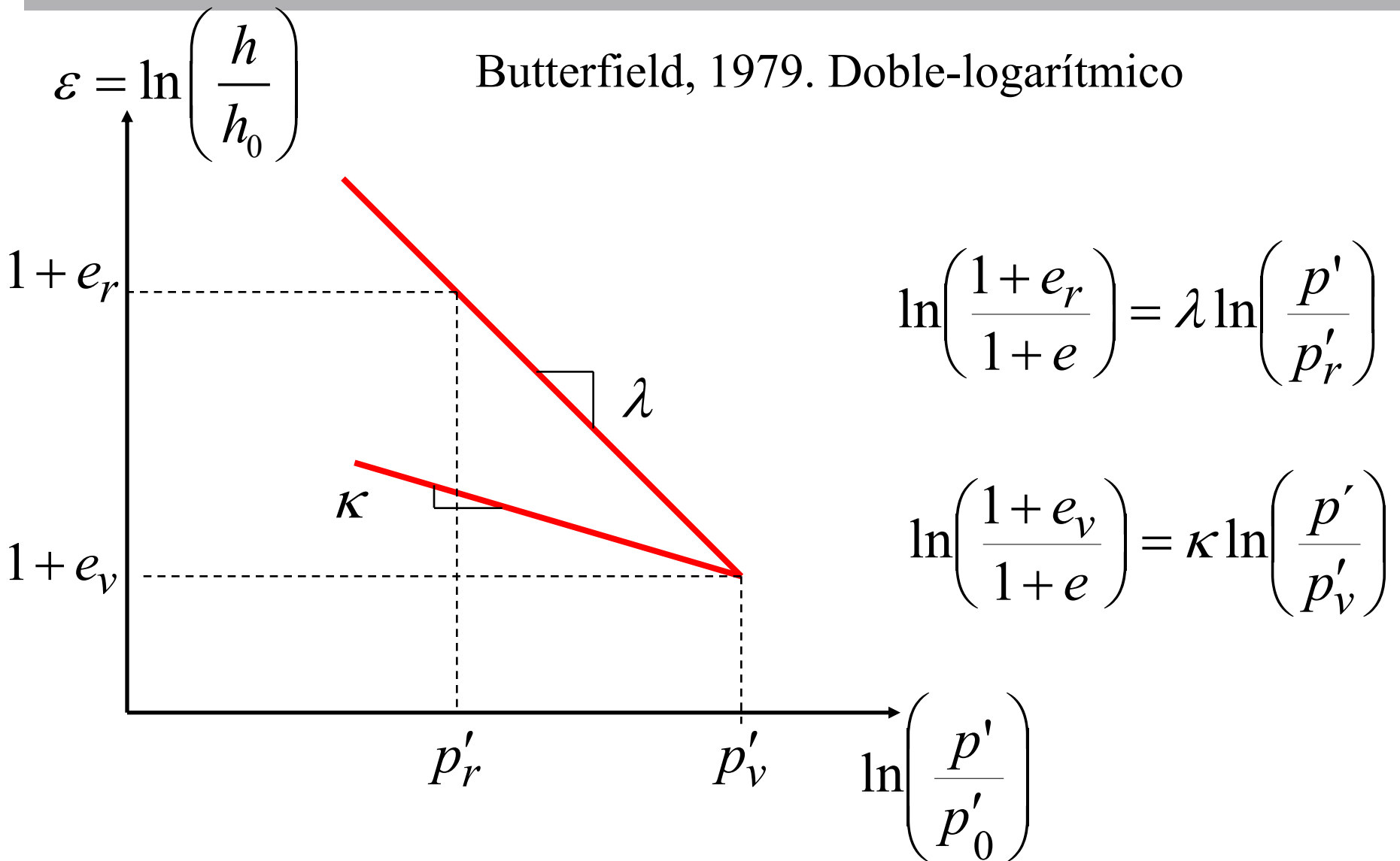
$$v = 1 + e$$

$$p' = \left(\frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_2}{3} \right)$$

$$v = v_r - \lambda^* \ln \left(\frac{p'}{p'_r} \right)$$

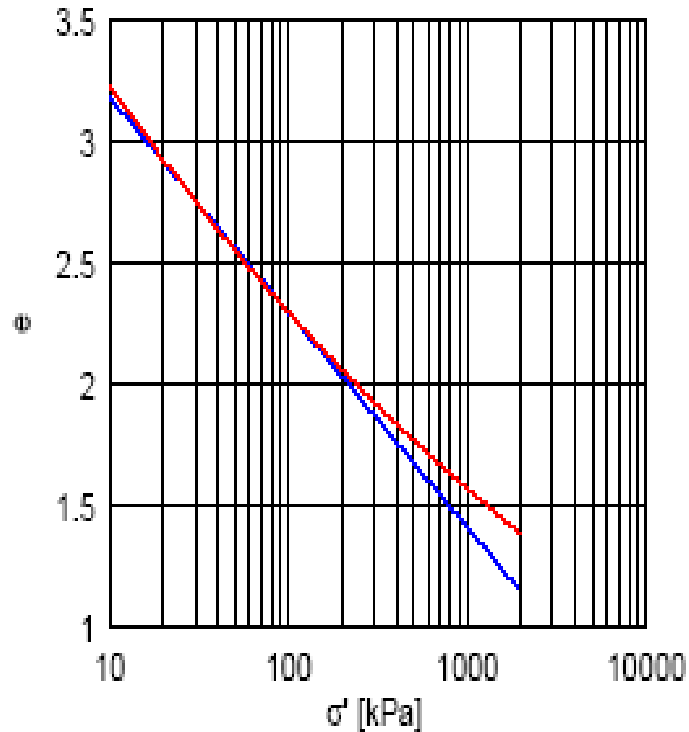
$$v = v_v - \kappa^* \ln \left(\frac{p'}{p'_v} \right)$$

Descripción matemática

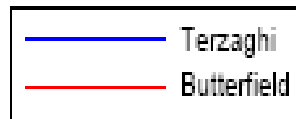
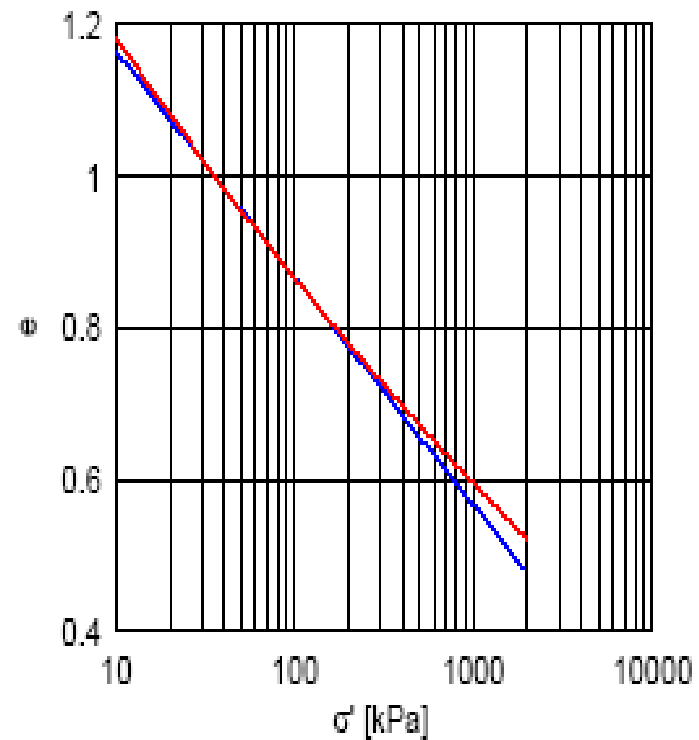


Descripción matemática

Arcilla de alta plasticidad

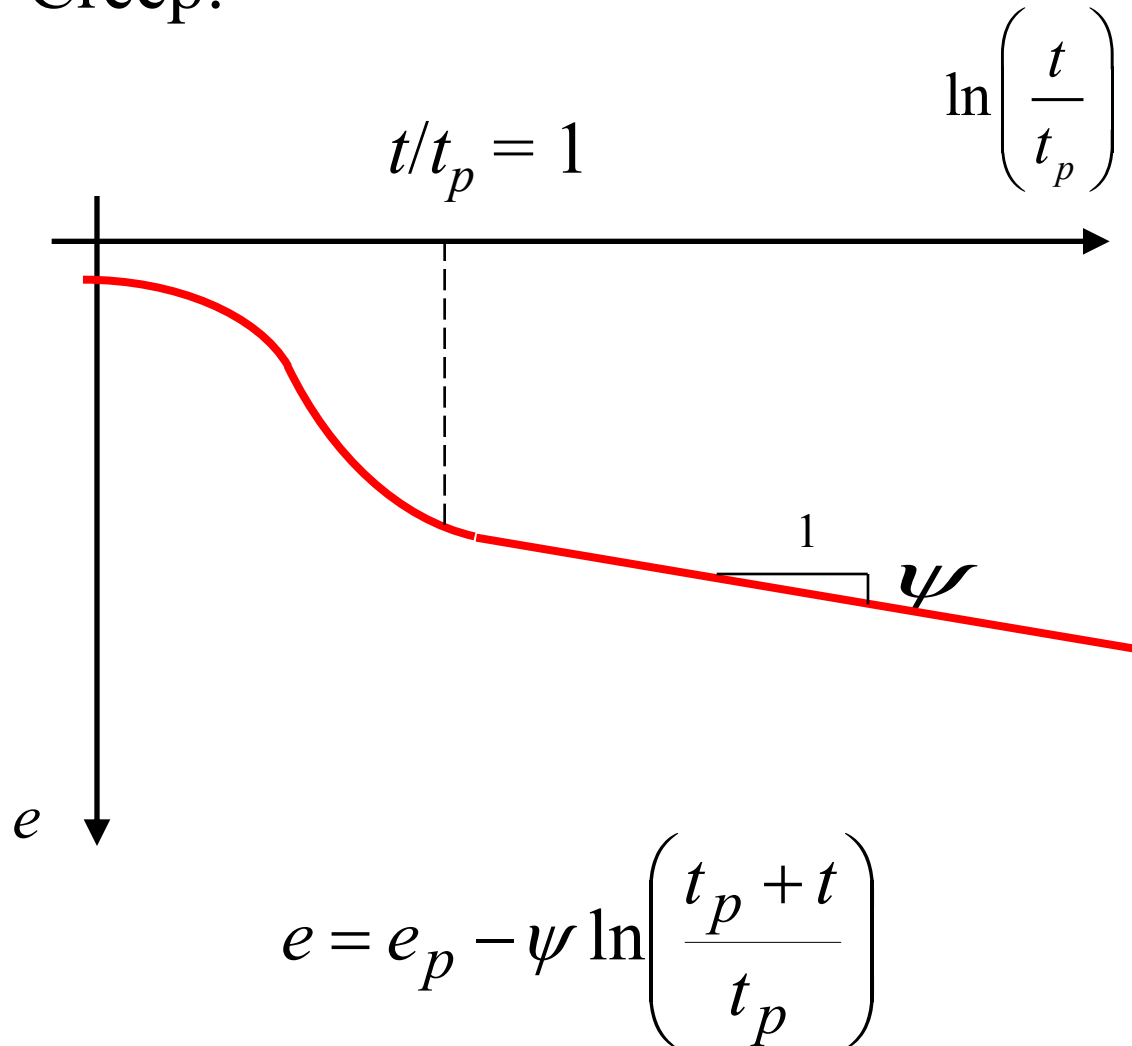


Arcilla de mediana plasticidad



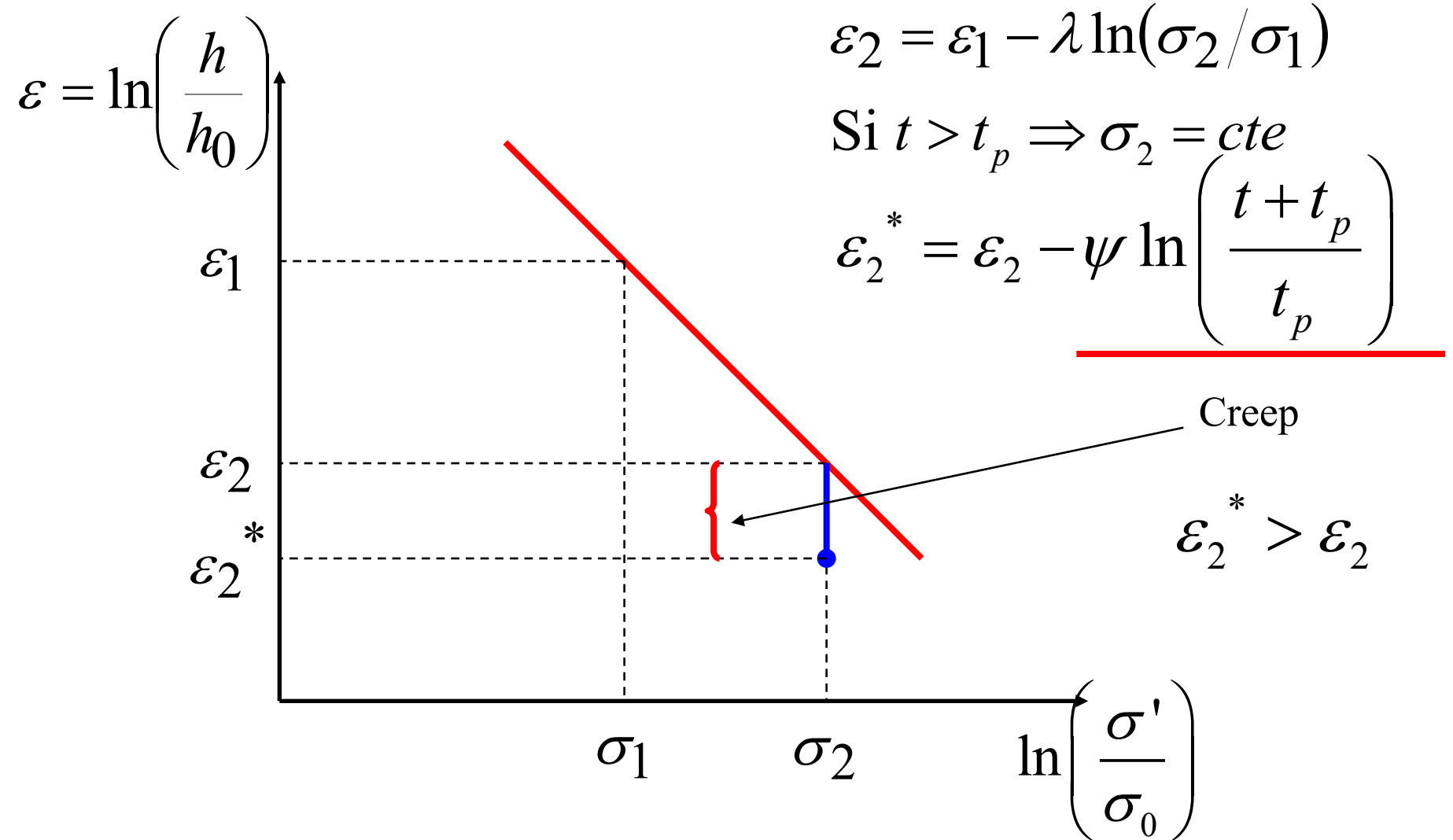
Descripción matemática

Creep:



t : tiempo
 t_p : tiempo de 100% consolidación primaria
 ψ : pendiente

Descripción matemática



2) Visco-hipoplasticidad en 1D

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

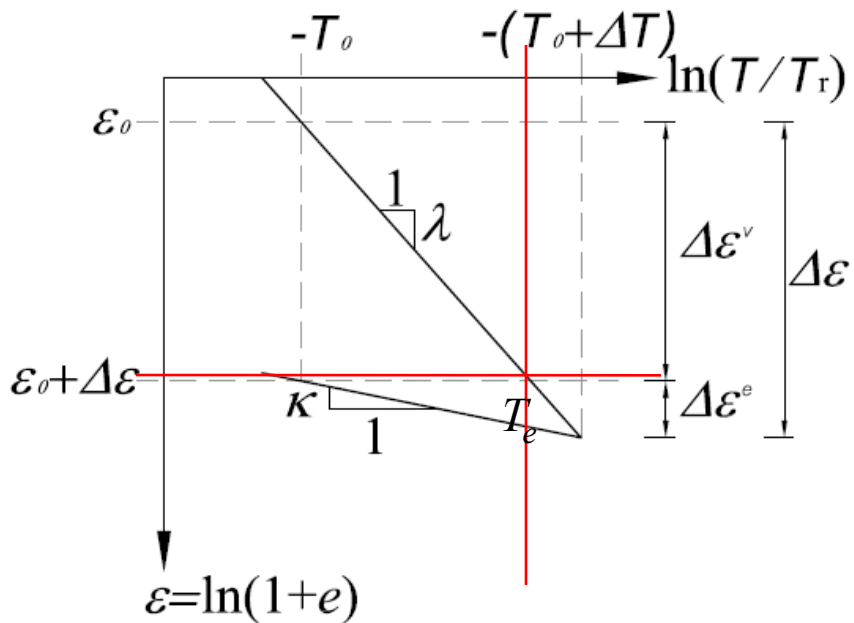
Convención en Visco-hipoplasticidad:

- Esfuerzos $T = -\sigma'$, >0 en tensión.
- Deformaciones ε
- Tasa de deformación $D = -\dot{\varepsilon}$, >0 tensión
- Tasa de deformación de referencia D_r
(antes $\dot{\varepsilon}_\alpha$)

(ligeramente distinto a la convención anterior)

El modelo 1D Consiste en 3
ecuaciones

2) Visco-hipoplasticidad en 1D



$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$$

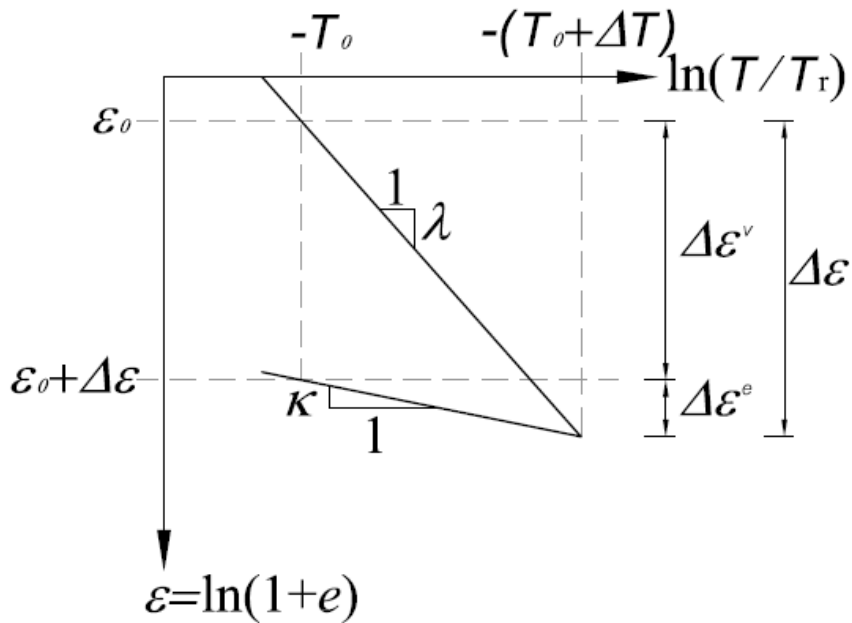
$$D = D^e + D^v$$

$\nearrow$ Elástica $\nearrow$ Viscosa

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\lambda \ln \left(\frac{T_e}{T_0} \right)$$

Donde T_e es el esfuerzo equivalente de Hvorslev

2) Visco-hipoplasticidad en 1D



$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\lambda \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right)$$

$$\Delta\varepsilon^e = -\kappa \ln\left(\frac{\Delta T}{T_r}\right)$$

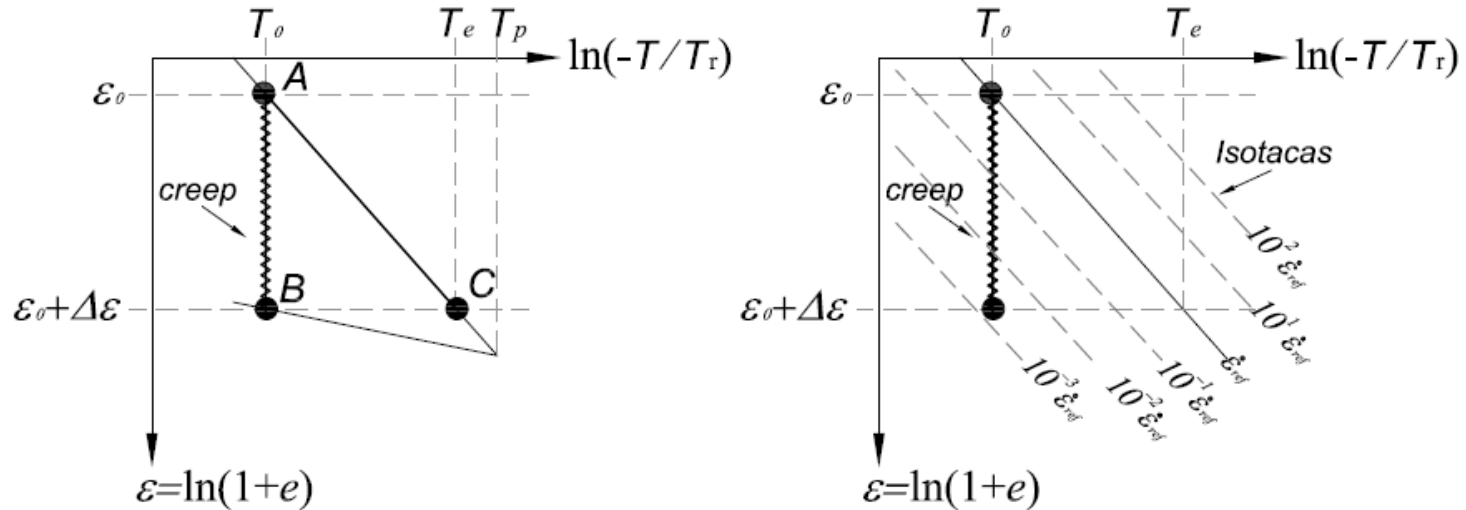
Derivando (con $D^e = D - D^v$):

$$\dot{T} = -\frac{T}{\kappa}(D - D^v)$$

Ec. 1.

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

Creep:



$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\lambda \ln \left(\frac{T_e}{T_0} \right) = \psi \ln \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)$$

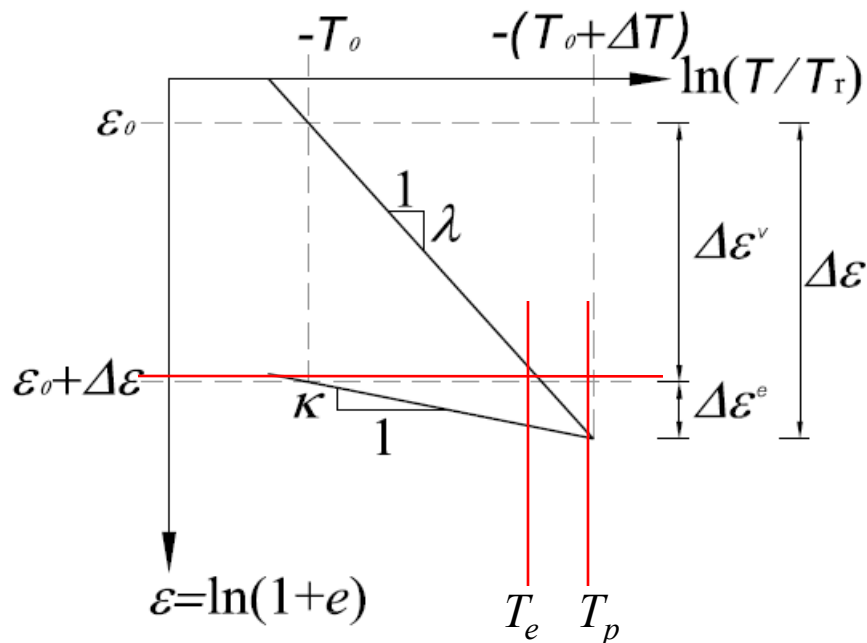
$$-\frac{T_e}{T_0} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{\psi/\lambda} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{I_v} \rightarrow \text{Índice de viscosidad}$$

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

■ OCR: índice de sobreconsolidación.

$$\text{OCR} = -\frac{T_e}{T}$$

Definición de Hvorslev. Similar a la definición de Terzagui: $\text{OCR} = \sigma'_p / \sigma'_0$



$$\text{OCR} = -\frac{T_e}{T_0} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{\psi/\lambda} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{I_v}$$

$$\text{OCR} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{I_v}$$

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

$$\text{OCR} = \left(\frac{t + t_0}{t_0} \right)^{I_v}$$

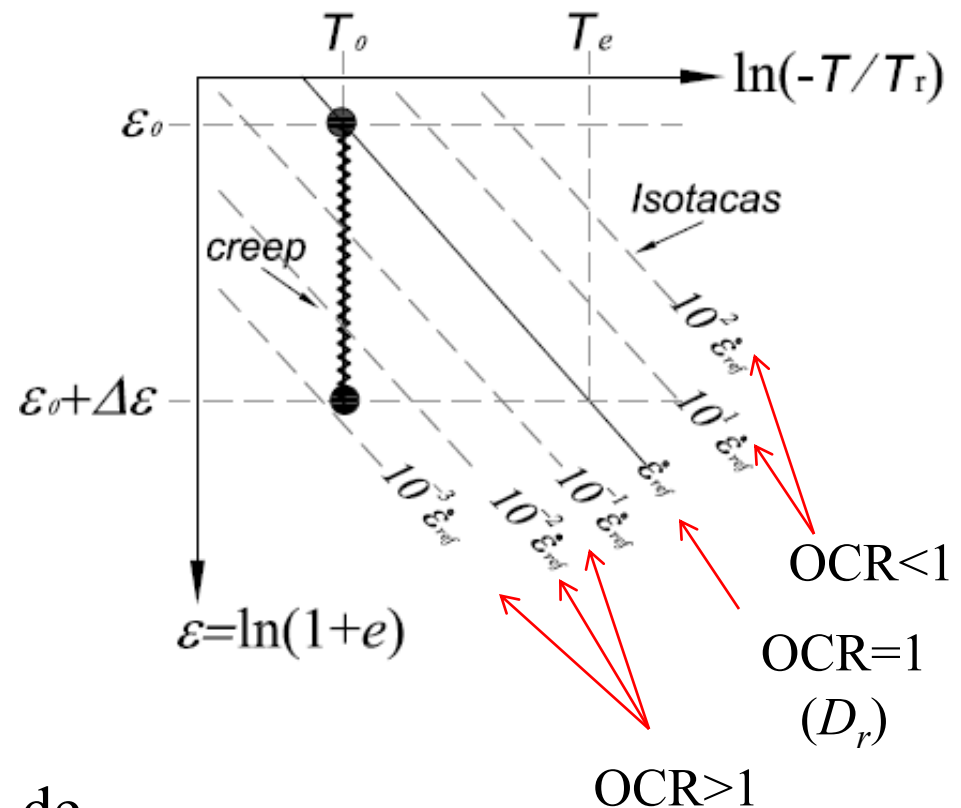
$$\frac{t + t_0}{t_0} = \text{OCR}^{1/I_v}$$

$$\frac{\Delta \varepsilon / (t + t_0)}{\Delta \varepsilon / t_0} = \text{OCR}^{1/I_v}$$

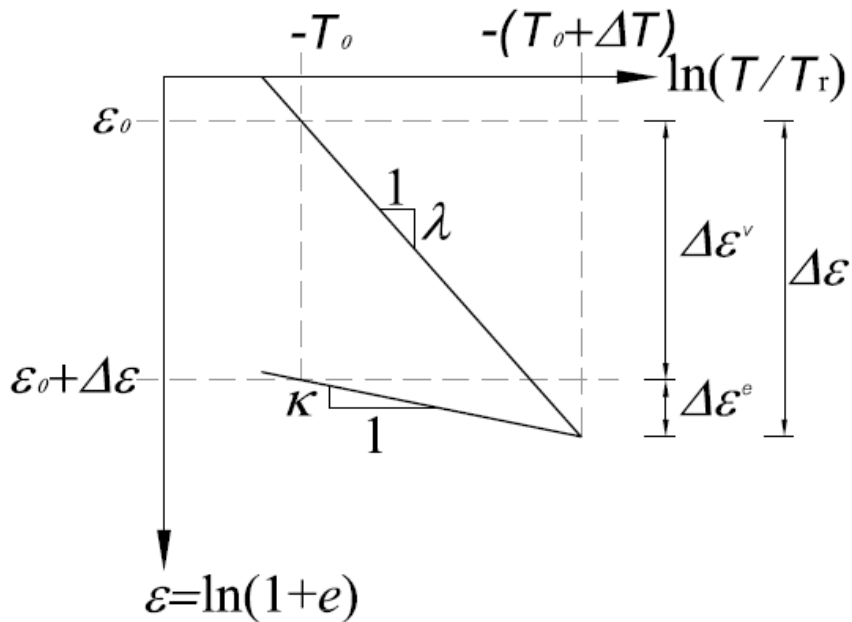
$$\frac{D^v}{D_r} = \text{OCR}^{1/I_v}$$

Ec. 2.

El OCR depende de la tasa de deformación. Tasa de deformación viscosa.



2) Visco-hipoplasticidad en 1D



$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\lambda \ln \left(\frac{T_e}{T_0} \right)$$

Teniendo en cuenta que: $\varepsilon = (1+e)$
y $\varepsilon_0 = (1+e_0)$ entonces:

$$T_e = T_0 \left(\frac{1+e}{1+e_0} \right)^{-1/\lambda}$$

Derivando:

$$\boxed{\dot{T}_e = -\frac{T_e D}{\lambda}} \quad \text{Ec. 3}$$

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

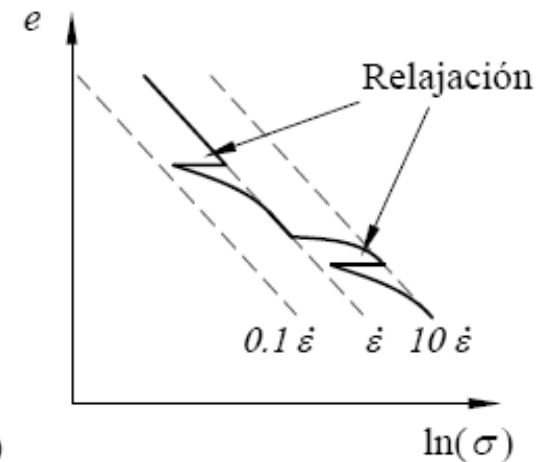
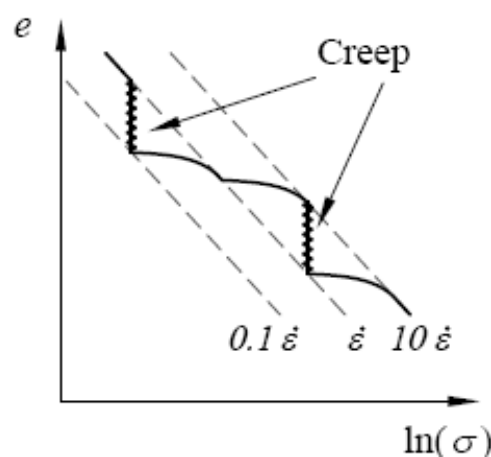
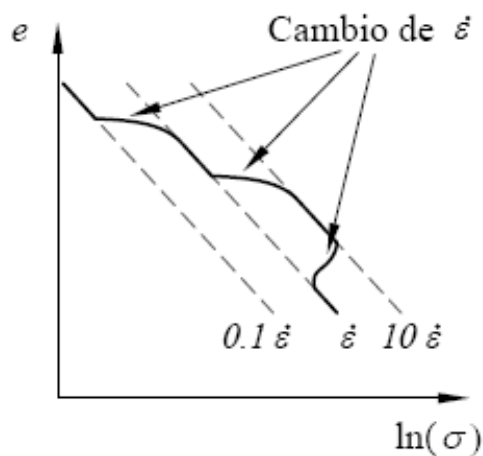
Las 3 ecuaciones básicas de la Visco-hipoplasticidad son:

$$1) \quad \dot{T} = -\frac{T}{\kappa}(D - D^v)$$

$$2) \quad \frac{D^v}{D_r} = \text{OCR}^{1/I_v}$$

$$3) \quad \dot{T}_e = -\frac{T_e D}{\lambda}$$

Reproduce:



2) Visco-hipoplasticidad en 1D

Reproducción del comportamiento dependiente de D ; condición de isotaca:

$$\frac{d}{dt} D^v = 0 \quad (\text{Ec. 4})$$

$$(\text{Ec. 2}) \quad D^v = D^r \left(-\frac{T}{T_e} \right)^{1/I_v} \quad \therefore \quad \ln D^v = \ln(-D_r) + \frac{1}{I_v} \ln \left(-\frac{T}{T_e} \right)$$

$$\text{Con la condición de la (Ec. 4):} \quad \frac{\dot{T}_e}{T_e} = \frac{\dot{T}}{T}$$

$$\text{Combinando Ec. 4, Ec. 1 y Ec. 3:} \quad D = D^v \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} = kte$$

(isotaca)

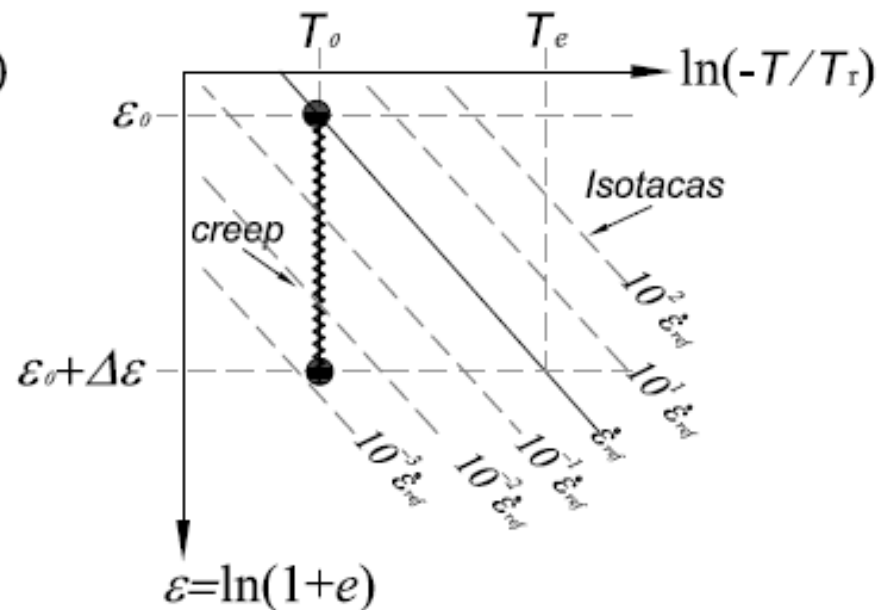
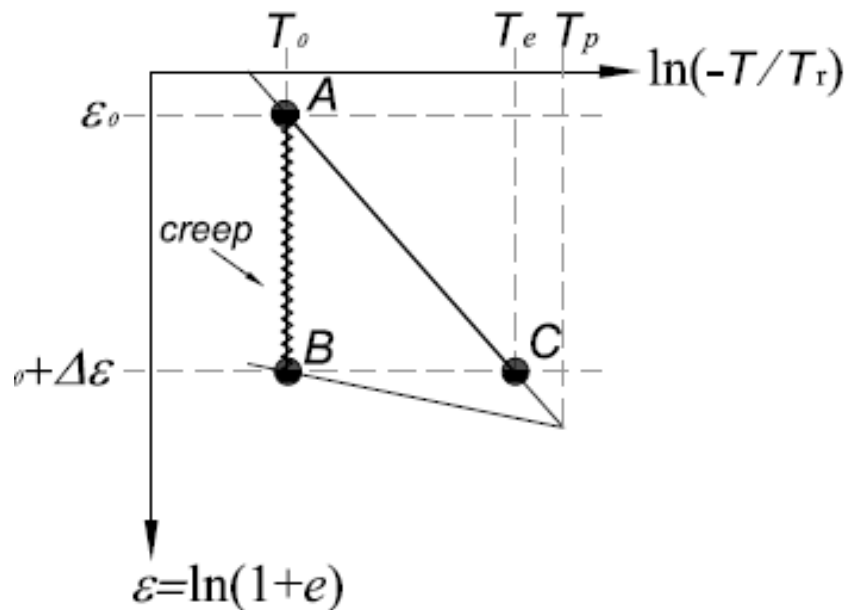
2) Visco-hipoplasticidad en 1D

Saltos isotacas:

$$\frac{d}{dt} D^v = 0$$

$$\frac{D_a^v}{D_b^v} = \frac{D_a}{D_b} \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \right)}{\left(\frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \right)} = \ln \left(\frac{T_b}{T_a} \right)$$

Creep: $\dot{T} = 0$ (Ec.1) $\dot{T} = -\frac{T}{\kappa}(D - D^v) = 0 \longrightarrow D = D^v$



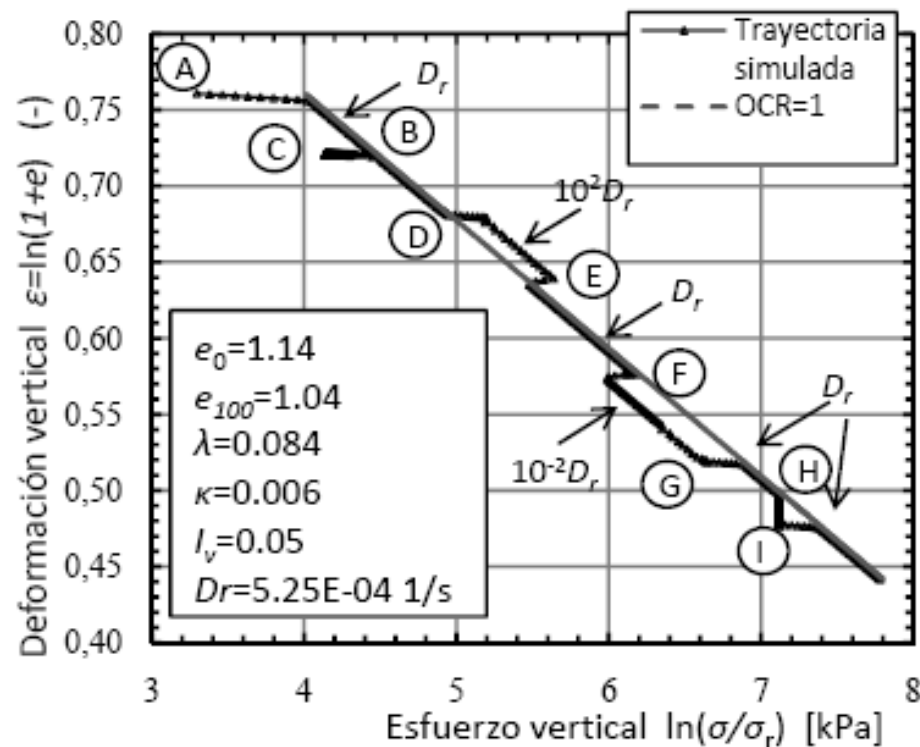
2) Visco-hipoplasticidad en 1D

Relajación:

$$\dot{T} = -\frac{T}{\kappa}(D - D^v) \quad D = 0 \quad \therefore \quad \dot{T} = -\frac{T}{\kappa D^v} \quad (\text{Esfuerzo disminuye})$$

Ec. 1.

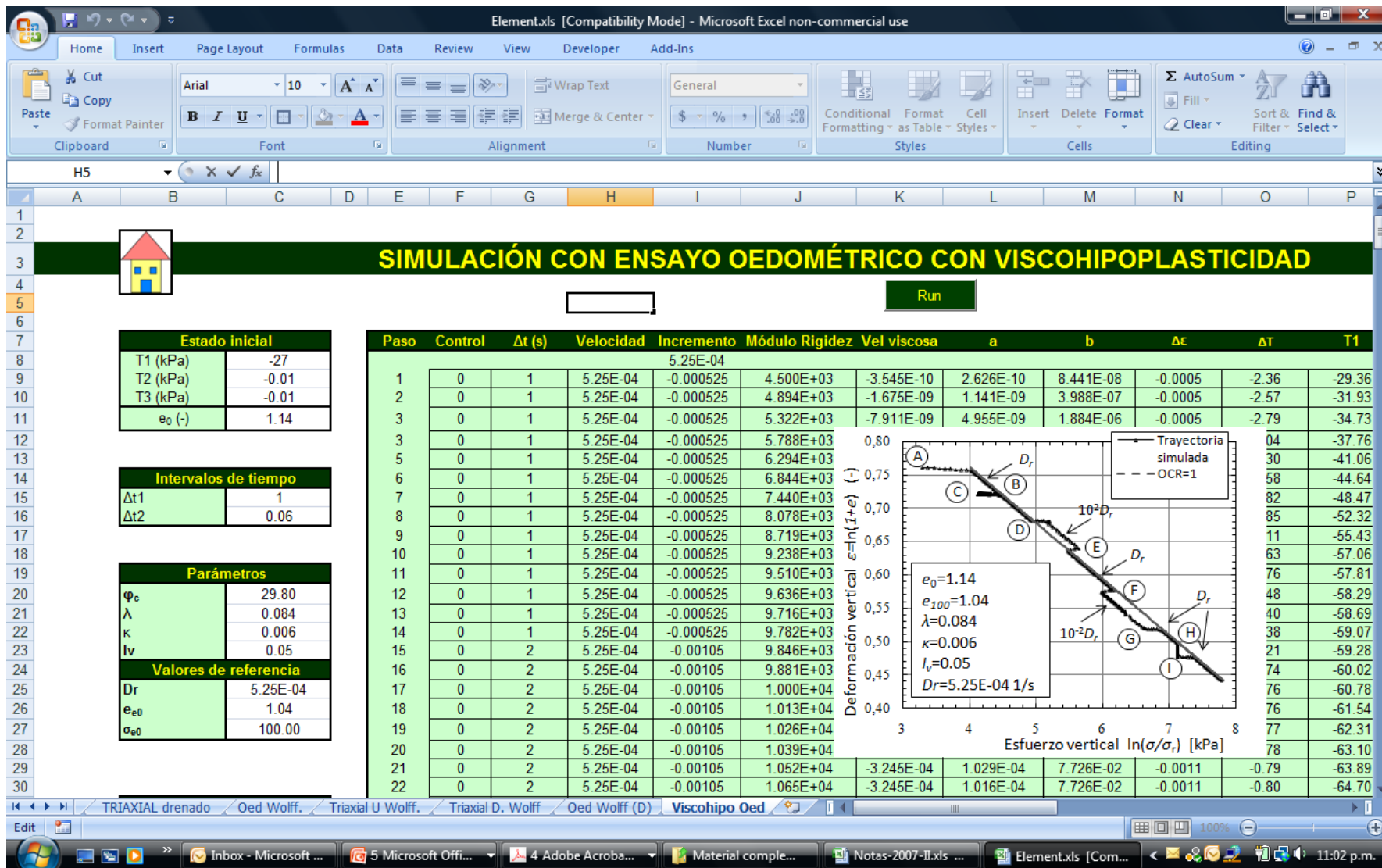
Ejemplo de simulación



2) Visco-hipoplasticidad en 1D

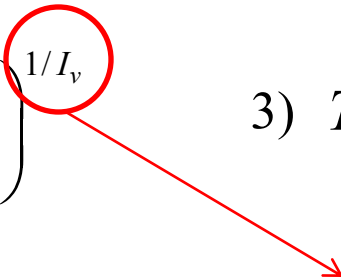
Constantes material	Variables de estado	Valores de referencia	Condición inicial
λ	T	T_{e0}	T_0
κ	e	e_{e0}	e_0
I_v		Γ o D_r	

2) Visco-hipoplasticidad en 1D



2) Visco-hipoplasticidad en 1D

Integración numérica:

$$1) \quad \dot{T} = -\frac{T}{\kappa}(D - D^v) \qquad 2) \quad D^v = -D_r \left(\frac{1}{\text{OCR}} \right)^{1/I_v} \qquad 3) \quad \dot{T}_e = -\frac{T_e D}{\lambda}$$


$$D^{v(t+1)} = \left(D^{v(t)} + \frac{\partial D^{v(t)}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial D^{v(t)}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon \right) \cdot \Delta t$$

Genera inestabilidad en la ecuación, $1/I_v \sim 20$

$$\frac{\partial D^{v(t)}}{\partial T} = \frac{1}{I_v} \frac{D^v}{T} = a \quad (\text{derivando Ec. 2})$$

$$\frac{\partial D^{v(t)}}{\partial \varepsilon} = \frac{D^v}{\lambda I_v} = b$$

$$\Delta T = -\frac{T^{(t)}}{\kappa} \left(\Delta \varepsilon - \left(D^{v(t)} + a \cdot \Delta T + b \cdot \Delta \varepsilon \right) \cdot \Delta t \right)$$

De la Ec. 1

2) Visco-hipoplasticidad en 1D

$$\Delta T = -\frac{T^{(t)}}{\kappa} \left(\Delta \varepsilon - \left(D^{v(t)} + a \cdot \Delta T + b \cdot \Delta \varepsilon \right) \cdot \Delta t \right) \quad \text{Ec. anterior}$$

Despejando ΔT en función de $\Delta \varepsilon$:

$$\Delta T = \frac{-T / \kappa \left((1 - b \cdot \Delta t) \cdot \Delta \varepsilon - D^v \cdot \Delta t \right)}{(1 - a \cdot \Delta t \cdot T / \kappa)}$$

Despejando $\Delta \varepsilon$ en función de ΔT :

$$\Delta \varepsilon = \left(-\frac{\Delta T}{T \cdot \kappa} + D^v \cdot \Delta t + a \cdot \Delta T \cdot \Delta t \right) \frac{1}{1 - b \Delta t}$$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

La Visco-hipoplasticidad está deducida a partir de la ecuación constitutiva hipoplástica:

◦

$$\mathbf{T} = \mathcal{E} : \mathbf{D}$$

◦

$$\mathbf{T} = f_b f_e \left(\mathcal{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\| \right) \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación constitutiva hipoplástica} \\ \text{(versión de Wollfersdorff)} \end{array}$$

$$\mathcal{L} := \frac{1}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(F^2 I + a^2 \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}} \right)$$

Tensor de cuarto orden lineal
en $\mathbf{D}$

$$\mathbf{N} := \frac{Fa}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^* \right)$$

Tensor de segundo orden no
lineal en $\mathbf{D}$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b f_e \left(\mathcal{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\| \right)$$

$$\mathcal{L} := \frac{1}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(F^2 I + a^2 \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}} \right) \qquad \mathbf{N} := \frac{Fa}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^* \right)$$

$\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ Tensor de la tasa de esfuerzo de Zaremba-Jaumann's

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}$$

$\mathbf{W}$ Tensor de giro del material

$\dot{\mathbf{T}}$ Tasa de esfuerzo

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b f_e \left(\mathcal{L} : \mathbf{D} + f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\| \right)$$

$$\mathcal{L} := \frac{1}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(F^2 I + a^2 \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}} \right) \qquad \mathbf{N} := \frac{Fa}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} \left(\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^* \right)$$

$\mathbf{T}$ Tensor de esfuerzo de Cauchy

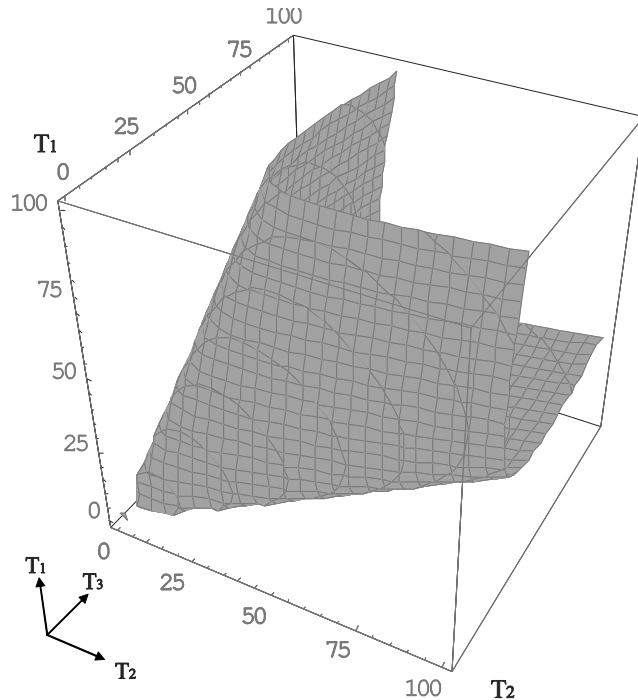
$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\text{tr} \mathbf{T}}$ Tensor normalizado de Cauchy

$\mathbf{D}$ Tensor de elongación.

$\hat{\mathbf{T}}^* = \frac{\mathbf{T}}{\text{tr} \mathbf{T}} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T} \mathbf{1}$ Tensor de esfuerzo desviador normalizado.

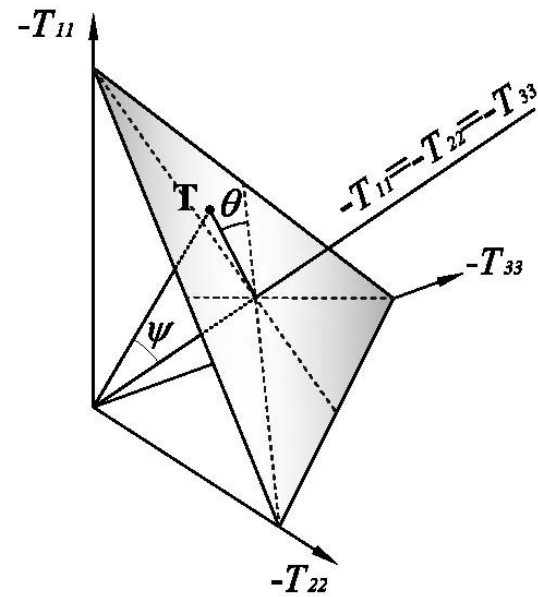
3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Matsuoka-Nakai



$$a = \frac{\sqrt{3}(3 - \sin(\varphi_c))}{2\sqrt{2}\sin(\varphi_c)}$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{8}\tan^2(\psi) + \frac{2 - \tan^2(\psi)}{2 + \sqrt{2}\tan(\psi)\cos(3\theta)}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan(\psi)$$



3) Visco-hipoplasticidad en 3D

De Hipoplasticidad a Visco-hipoplasticidad

- Se modifica el factor de barotropía f_b
- Se remueven los factores de picnotropía f_e y de densidad $f_d, f_e = f_d = 1$. La dependencia de la relación de vacíos es introducida por el OCR.
- El término no lineal se reemplaza por un término que tiene en cuenta los efectos por la tasa de deformación

◦

$$\mathbf{T} = f_b \cancel{f_e} \left(\mathcal{L} : \mathbf{D} + \cancel{f_d} \mathbf{N} \|\mathbf{D}\| \right)$$

◦

$$\mathbf{T} = f_b \left(\mathcal{L} : \mathbf{D} + \mathbf{N} \|\mathbf{D}\| \right)$$

◦

$$\mathbf{T} = f_b \mathcal{L} : \left[\mathbf{D} + \left(\mathcal{L}^{-1} : \mathbf{N} \right) \|\mathbf{D}\| \right]$$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b \mathcal{L} : \left[\mathbf{D} + \left(\mathcal{L}^1 : \mathbf{N} \right) \|\mathbf{D}\| \right]$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b \hat{\mathcal{L}} : \left\{ \mathbf{D} - \underbrace{\left[- \left(\hat{\mathcal{L}}^1 : \mathbf{N} \right) \|\mathbf{D}\| \right]}_{\mathbf{D}^v} \right\}$$

$$\boxed{\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b \hat{\mathcal{L}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^v)}$$
 Ecuación constitutiva Niemunis (1995)

Modelo 1D $\rightarrow$

$$\dot{\sigma}' = - \frac{\sigma'}{K} \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^v \right)$$

Modelo 3D $\rightarrow$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f_b \hat{\mathcal{L}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^v)$$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Determinación del f_b

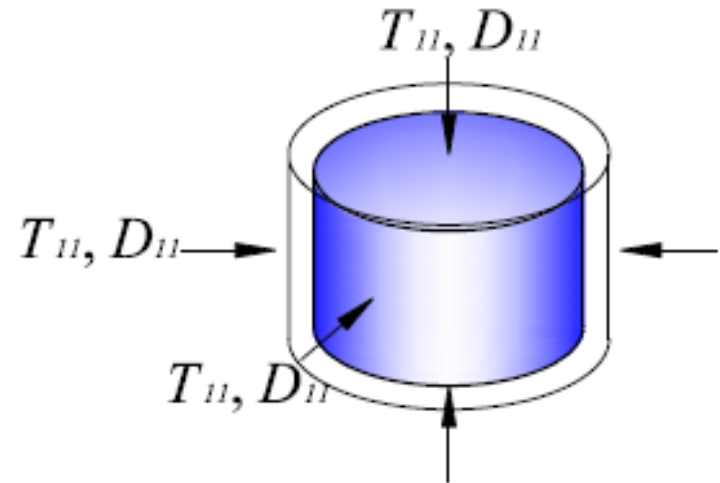
$$\dot{\mathbf{T}} = f_b \mathcal{L} : \left[\mathbf{D} + \left(\mathcal{L}^1 : \mathbf{N} \right) \|\mathbf{D}\| \right]$$

Para compresión isotrópica:

$$f_b = - \frac{\text{tr} \mathbf{T}}{\left(1 + \frac{a^2}{3} \right) \kappa}$$

$$a := \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c}$$

Es proporcional a la traza de los esfuerzos



3) Visco-hipoplasticidad en 3D

$$\dot{\mathbf{T}} = f_b \hat{\mathcal{L}} : \left\{ \mathbf{D} - \underbrace{\left[- \left(\hat{\mathcal{L}}^{-1} : \mathbf{N} \right) \|\mathbf{D}\| \right]}_{\mathbf{D}^v} \right\}$$

Dirección de $\mathbf{D}^v$:

Magnitud de $\mathbf{D}^v$:

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}^{-1} : \mathbf{N}}{\|\hat{\mathcal{L}}^{-1} : \mathbf{N}\|} = \vec{\mathbf{B}}$$

$$\|\mathbf{D}^v\| = -D_r \left(\frac{1}{\text{OCR}} \right)^{1/I_v}$$

(Regla de flujo hipoplástica)

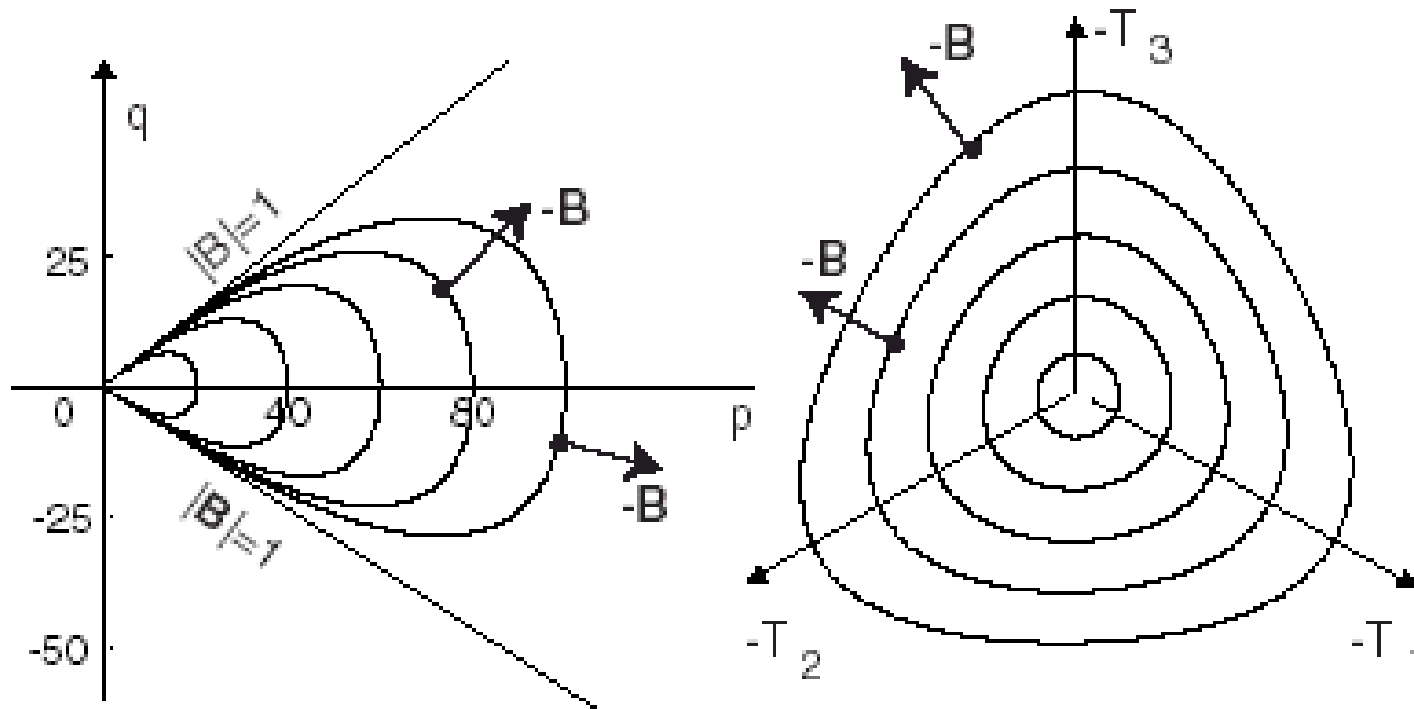
$$\mathbf{D}^v = -D_r \vec{\mathbf{B}} \left(\frac{1}{\text{OCR}} \right)^{1/I_v}$$

Modelo 1D:

$$D^v = -D_r \left(\frac{1}{\text{OCR}} \right)^{1/I_v}$$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

$$\mathbf{D}^v = -D_r \vec{\mathbf{B}} \left(\frac{1}{\text{OCR}} \right)^{1/I_v}$$



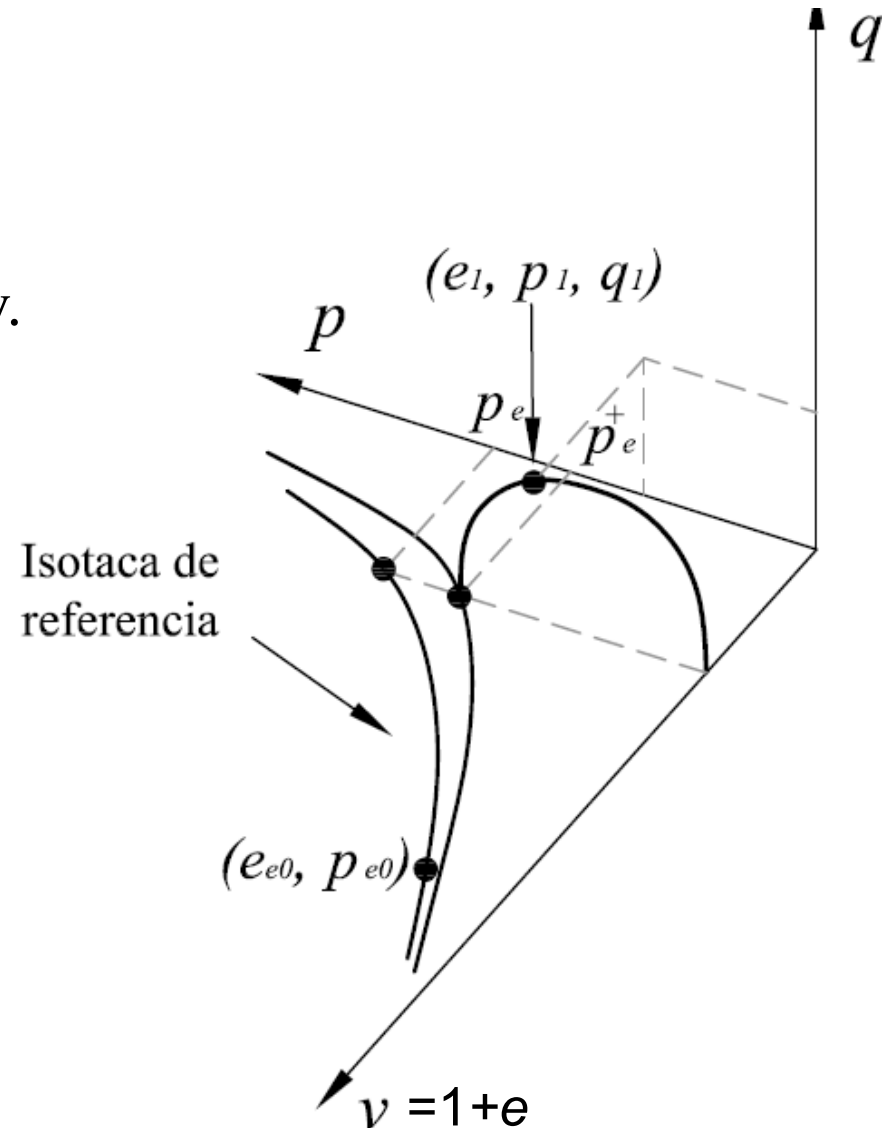
3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Definición del OCR en 3D:

- Se introduce la superficie de fluencia elíptica del Cam-Clay.

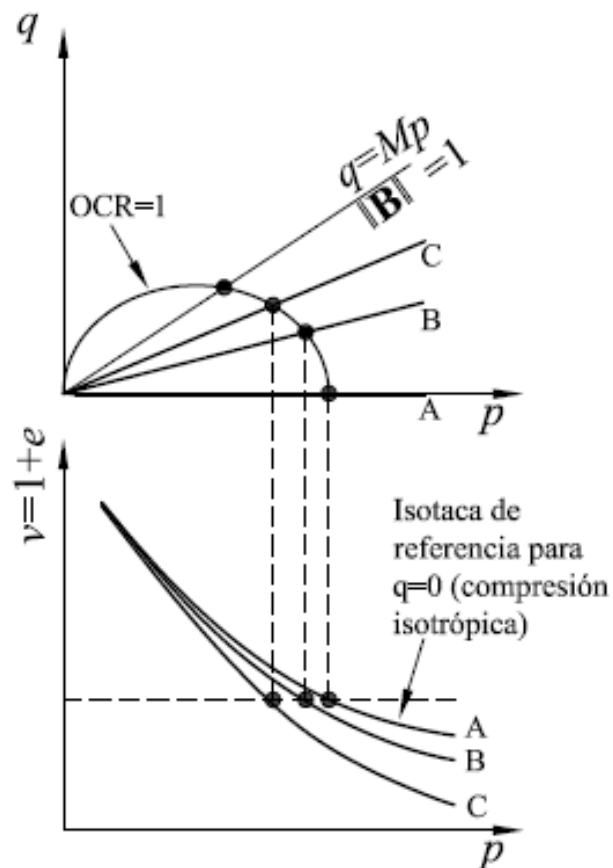
$$p(p - p_e) + \frac{q^2}{M^2} = 0$$

M : pendiente de la línea del estado crítico en p vs. q

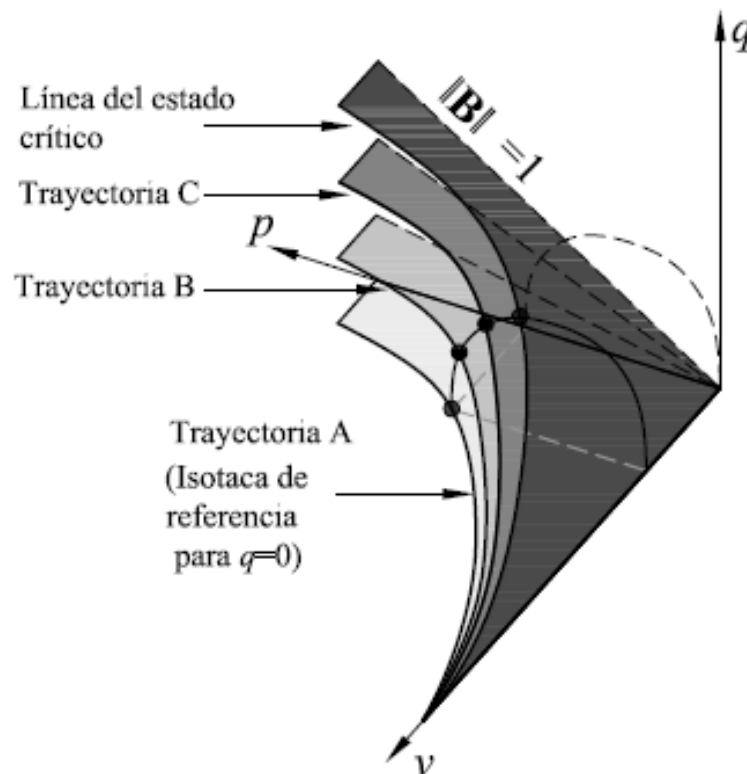


3) Visco-hipoplasticidad en 3D

OCR=1:



(a) Trayectorias con $OCR=1$, bajo la misma magnitud en la tasa de deformación $\|D\| = kte$ y con distintos sentidos de deformación



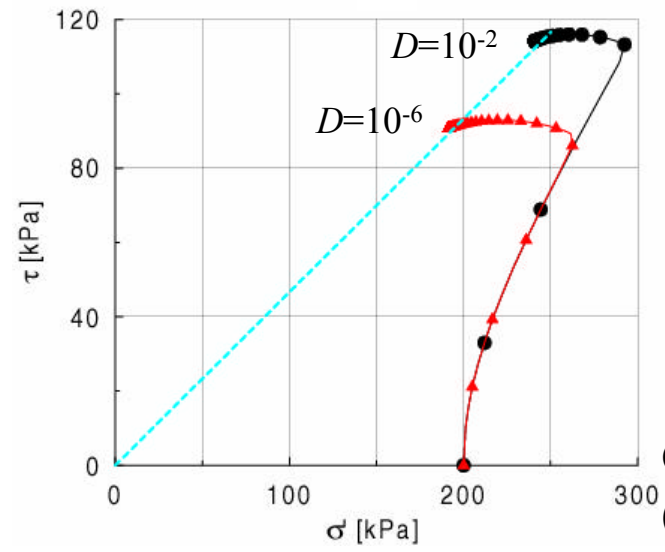
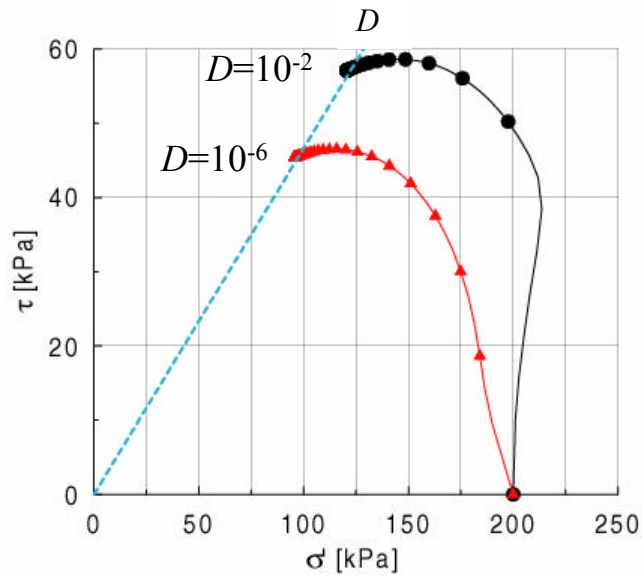
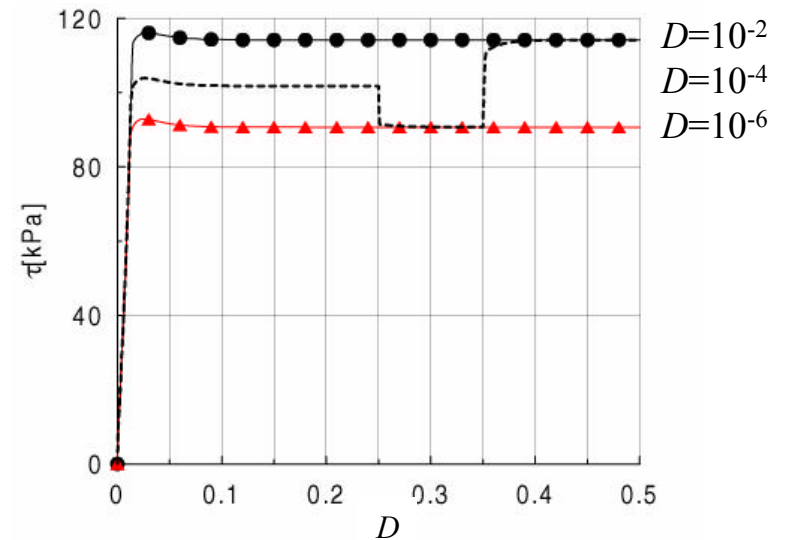
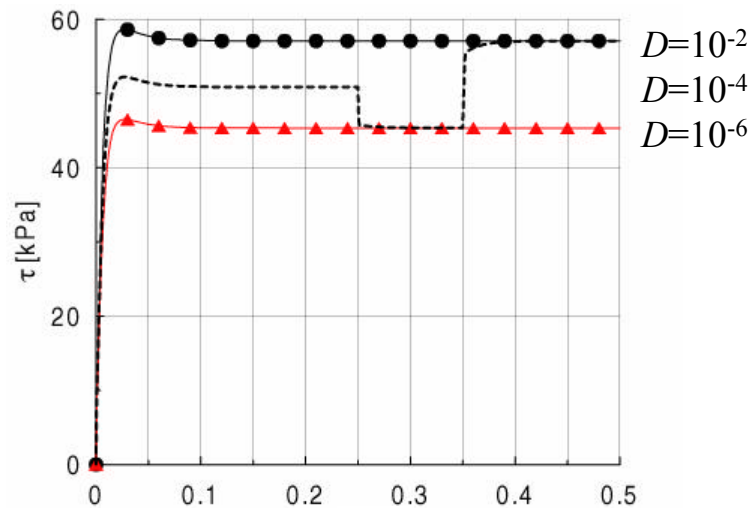
(b) Representación en el diagrama $v - p - q$

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Reference model	Ensayo
e_{100}	oedometrico
λ	oedometrico
κ	oedometrico
β_R	Ensayo no drenado
I_v	Creep, límite líquido
D_r	oedometrico
φ_c	triaxial
OCR	oedometrico

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

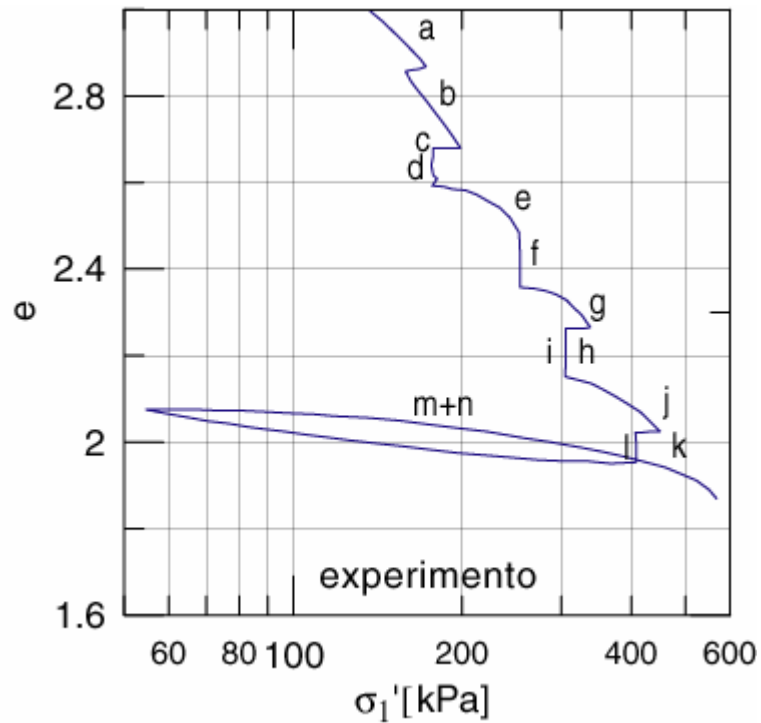
Corte simple no drenado



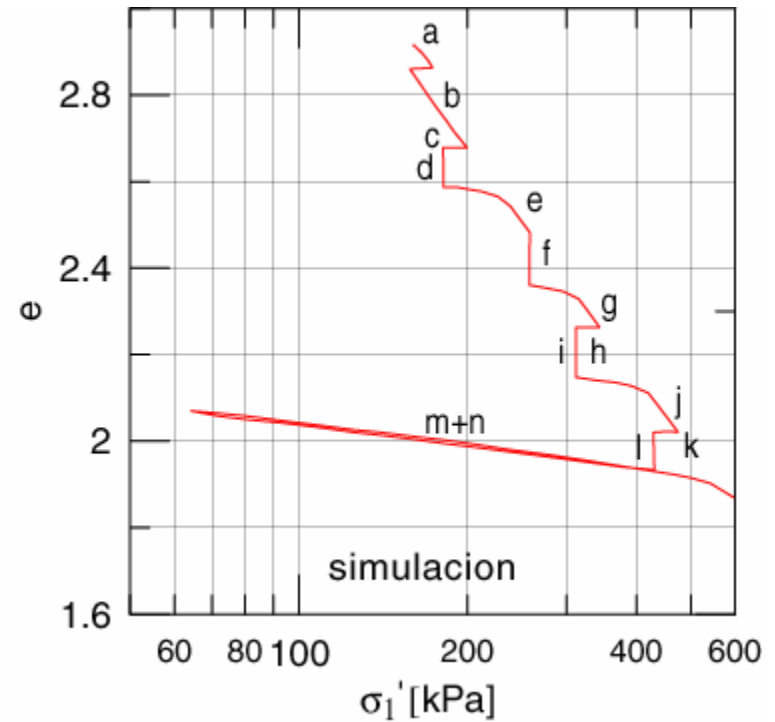
Cudmani
(2004)

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Ensayo oedométrico



Krieg (2000)



Niemunis (2003)

3) Visco-hipoplasticidad en 3D

Fin, gracias.

Referencias

- Butterfield, R.: A natural compression law for soils. *Géotechnique*. 29 (4): 469-480, 1979.
- Leinenkugel, H.J.: Deformation and strength behaviour of cohesive soils experiments and their physical meaning. *PhD Dissertation. University of Karlsruhe. Publications of Institute of Soil and Rock Mechanics, Universität Karlsruhe (in German)*, Heft 66, 1976.
- Niemunis, A.: A visco-plastic model for clay and its FE-implementation. In E. Dembicki, W. Cichy, L Balachowski (eds), *Resultants Recents en Mécanique des Sols et des roches, Politechnika Gdanska*: 151-162, 1996.
- Niemunis, A.: Extended hypoplastic models for soils. *Dissertation, University of Bochum. Publications of Institute für Grundbau und Bodenmechanik der Ruhr, Bochum*, habilitation Thesis No. 34, 2003.
- Niemunis A. & Herle, I.: Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 2: 279-299, 1997.
- Wolffersdorff, P. A. v.: A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, Vol 1, pp 251–271, 1996.